مبادئ الإحصاء

الدكتور جلال الصياد   الأستاذ عادل سمرة



ⓗ دار حافظ للنشر والتوزيع ، ١٤٢٢هـ
فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
الصياد، جلال
مبادئ الاحصاء/ جلال الصياد، عادل سمرة - جدة
٢٢١ ص ؛ ٢٤سم
ردمك : ٦-١٧-٦٥٤-٩٩٦٠
١- الاحصاء ٢-الاحتمالات (رياضيات) أ- سمرة ، عادل (م.مشارك)
ب- العنوان
ديوي ٥١٩،٥ ٢٢/٢٨٤٤
رقم الايداع : ٢٢/٢٨٤٤
ردمك : ٦-١٧- ٦٥٤-٩٩٦٠

الطبعة الثانية
١٤٢٤هـ - ٢٠٠٣م



المملكة العربية السعودية - جدة

هاتف : ٦٨٧٠٥٨٢ ، فاكس : ٦٨٩٥٣٩٢

الموقع : Http://www.darhafiz.com

البريد الإلكتروني : darhafiz@yahoo.com

تقديم

الإحصاء كأداة للبحث والدراسة العلمية المنظمة يعتمد على التعبير الرقمي للظواهر بهدف الكشف عن المعالم التي تحكم تلك الظواهر أو توضح العلاقة بينها، وعلى أساس هذا المفهوم لايقتصر عمل الإحصائي على جمع البيانات بل يتعدى ذلك إلى تحليلها للتعبير عن مدلولات الظاهرة تعبيراً علميا يستفاد منه في كافة مجالات اتخاذ القرارات التخطيطية والعلمية وغيرها .

وانطلاقاً من هذا المعنى نقدم هذا الكتاب الذي يعرض للمباديء الأساسية لعلم الإحصاء في أسلوب مبسط ليسهل فهمه على طلاب الدراسات الاقتصادية والادارية وكذلك طلاب الدراسات الأدبية ، علاوة على تقديم عدد من الأسئلة المحلولة والتمارين لكل موضوع .

ونود أن نقدم الشكر الجزيل إلى عدد كبير من الأخوة الزملاء الذين ساهموا بتزو يد المكتبة العربية بعدد غير قليل من الكتب الإحصائية التي استفدنا منها كثيراً .

والله ولي التوفيق ،

المؤلفان



الباب الأول

جمع وعرض البيانات

مقدمة :

الإحصاء هو العلم الذي يبحث في جمع البيانات الخاصة لمختلف الظواهر وتصنيف هذه البيانات في جداول منظمة وتمثيلها بيانياً على شكل رسومات أو صور توضيحية وكذلك تحليل البيانات واستخلاص النتائج منها واستخدامها في إتخاذ القرار المناسب ومقارنة الظواهر ببعضها ومحاولة إستنتاج علاقات بينها .

وقد استخدم الأحصاء منذ زمن بعيد وكان مقتصراً على جمع البيانات ووضعها في جداول وتمثيلها في شكل رسومات بيانية أوصور توضيحية . وكان استخدام الإحصاء قاصراً على الحكومات فقط حيث كانت تهتم بجمع البيانات التي تتعلق أساساً بمعرفة عدد السكان والثروات لاستخدامها في أغراض الحروب وجباية الضرائب.

ومع تقدم المدنية امتد استخدام الإحصاء إلى كافة المجالات التي تهم الدولة من أمور اقتصادية واجتماعية وزراعية وصناعية وتعليمية وغيرها بل أصبح أحد العوامل الرئيسية لنجاح الدول هو استخدام الأساليب الإحصائية لخدمة أهداف التخطيط الذي أصبح يعتمد على بحوث إحصائية يقوم بإعدادها متخصصون في هذا المجال .

ولم يعد استخدام الإحصاء قاصراً على الحكومات فقط بل امتد كذلك إلى المشروعات والهيئات الخاصة التي تصور نشاطاتها المختلفة في صورة بيانات دورية منظمة تساعد الادارة العليا في هذه المؤسسات على إتخاذ قراراتها على أسس علمية سليمة دقيقة .

إن الطرق الحديثة لعلم الإحصاء مفيدة في حل أنواع متعددة من المشاكل ، ونعرض فيما يلي بعض الأمثلة لمسائل كثيرة تستطيع الطرق الإحصائية المساعدة في حلها :

- كيفية إختبار مدى تأثير مصل معين .
- كيفية التمييز بين انفجار قنبلة ذرية وزلزال صغير من على بعد عدة أميال .
- كيفية معرفة ما إذا كان التغير في الرقم القياسي للمستهلك هو تغير موسمي أو تغير عرضي .
- مدى تأثير السمنة على طول حياة الإنسان .
- مدى تأثير التدخين في زيادة احتمال الإصابة بمرض السرطان .

- كيفية مراقبة الإنتاج بحيث يمكن اكتشاف الخلل فور حدوثه.
- معرفة نسبة التالف في إنتاج مصنع كبير بواسطة عينة صغيرة من الإنتاج.
- كيفية تقدير نسبة الأفراد المصابين بمرضٍ ما.

هذه الأمثلة وغيرها كثير تستطيع الطرق الإحصائية المساعدة في إيجاد حل لها.

وفي الوقت الحاضر دخل علم الإحصاء في كافة مجالات العلوم المختلفة، وفيما يلي نضرب مثالاً واحداً لاستخدام الإحصاء في بعض من هذه المجالات:

علم الاجتماع:

يدخل في النظريات التي تصف الهجرة الداخلية ومدى تأثيرها على سلوك المجتمع ــ تصميم عمليات المعاينة التي تساعد على بناء واختبار نظريات النظم الاجتماعية ــ تحليل تكاليف المساعدات والتأمينات الاجتماعية ــ شرح الفرق في الاتجاه والسلوك بين جماعات من الناس ــ تصميم وتحليل التجارب لوصف وشرح سلوك الجماعة.

علم النفس:

يدخل في نظريات التربية والمشاكل المتعلقة بقياسات القدرة على التعلم، الذكاء، الصفات الشخصية ــ السلوك الطبيعي والغير طبيعي للاشخاص ــ وفي ايجاد مقاييس ومعايير لاستخدامها في هذه المجالات.

السكان:

يساعد في دراسة تطور مجتمع السكان عن طريق معدلات المواليد والوفيات ومعدلات الهجرة وكذلك دراسة معالم المجتمع الاجتماعية والاقتصادية والمهنية وغيرها.

التعليم:

يساهم في وضع خطط التعليم الحالية والمستقبلة وتقدير احتياجاتها من قوى بشرية ومباني ومعامل وأجهزة وكذلك يساعد على حل مشاكل التعليم عن طريق توفير البيانات الفعلية التي تلقى الضوء على الحجم الحقيقي للمشكلة.

الاقتصاد:

يساعد على معرفة حجم التجارة ــ مصادر القوى العاملة ــ مستوى المعيشة ــ تحليل سلوك المنتج والمستهلك ومدى تأثر السوق بتغير الأسعار والقوانين الحكومية.

علم الأحياء:

يستخدم في الأبحاث الأساسية والتجارب المعملية الخاصة بتطور الحياة والوراثة.

من هذه الأمثلة نستطيع أن نتبين أهمية علم الإحصاء في كافة مجالات الحياة.

جمع البيانات

١ــ مقدمة:

يقصد بجمع البيانات الحصول على معلومات رقمية أو وصفية تتصف بالصحة والدقة عن ظاهرة معينة من مصدر معين في فترة زمنية محدودة. فالبيانات الإحصائية لاتجمع لذاتها ولكن لخدمة هدف معين أو لحل مشكلة معينة، فلدراسة أي مشكلة لابد أن تتوافر عنها بيانات تفصيلية في صورة رقمية تساعد في تحديد حجم هذه المشكلة تحديداً واضحاً وتنير الطريق لاتخاذ أنسب القرارات التي يتعين إتخاذها.

٢ــ مصادر جمع البيانات:

تنقسم المصادر التي تجمع منها البيانات اللازمة لأى بحث أودراسة إلى:

(أ) مصادر تاريخية. (ب) مصادر ميدانية.

وفيما يلي عرض موجز لكل من هذين المصدرين.

(أ) المصادر التاريخية:

قبل جمع البيانات عن أى مشكلة لابد وأن يسبقه دراسة وافية للمصادر التاريخية للموضوع محل الدراسة، إذ من المحتمل أن تتوافر البيانات التي نريد جمعها ــ كلها أو بعضها ــ في الإحصاءات التي تنشرها الأجهزة الإحصائية أو الهيئات المتخصصة في الدولة. ففي هذه الحالات توفر علينا البيانات التي نحصل عليها من هذه المصادر مشقة جمعها من الميدان مرة أخرى وما يترتب عليه من جهد بشرى وتكاليف مادية.

(ب) المصادر الميدانية:

إذا لم يجد الباحث البيانات التي يريدها في أي من المصادر التاريخية، فإنه يلجأ إلى المصدر الأصلي لجمع البيانات التي يريدها عن طريق المشاهدة المباشرة أو عن طريق توجيه أسئلة لمصدر البيان وجمع الإجابة على استمارة تعد لهذا الغرض تسمى «الاستمارة الإحصائية»:

ويتم جمع البيانات ميدانيا باحدى الطرق الآتية:

(أ) المقابلة الشخصية. (ب) المراسلة (البريد) (جـ) التليفون

(أ) المقابلة الشخصية:

وفي هذه الطريقة يقوم جامع البيان بمقابلة كل فرد من أفراد البحث وتوجيه الأسئلة الموجودة في الاستمارة الإحصائية إليه وتدوين الإجابة في المكان المخصص أمام كل سؤال.

وتمتاز هذه الطريقة بأنها أصلح طرق جمع البيانات في حالة انتشار الأمية بين أفراد البحث، كما تمكن جامع البيان من التأكد من صحة الإجابات التي يحصل عليها عن طريق مقارنتها ببعضها .

(ب) المراسلة (البريد) :

وفي هذه الطريقة تقوم الجهة المسؤولة عن البحث بإرسال استمارات جمع البيانات بالبريد إلى أفراد البحث مرفقاً بها الإرشادات الخاصة باستيفاء الاستمارة وموضحاً بها أهداف البحث وأهميته . وعادة يرفق مع الاستمارة مظروف بعنوان الجهة المشرفة على البحث وعليه طابع بريد لإعادة الاستمارة بعد استيفائها .

وتصلح هذه الطريقة في حالة المجتمعات التي تقل فيها نسبة الأمية كما أنها تعطى فرصة كافية للمبحوث لدارسة الأسئلة وتفهمها قبل الرد عليها علاوة على قلة التكاليف اللازمة لجمع البيانات في هذه الطريقة .

٣ـ اسلوب جمع البيانات :

يتم جمع البيانات من الميدان بأحد الأسلوبين الآتيين :

(أ) الحصر الشامل :

وفيه يتم جمع البيانات من جميع أفراد المجتمع محل البحث . و يستخدم هذا الأسلوب عادة في الأبحاث الإحصائية الكبيرة والتي تجرى على فترات زمنية متباعدة كالتعدادات العامة .

(ب) العينات :

وفيه يتم جمع البيانات من بعض أفراد المجتمع الذين يختارون بطريقة معينة بحيث يمثلون المجتمع محل الدراسة أصدق تمثيل . ومن بيانات العينة تعمم النتائج على مجتمع البحث كله .

عرض البيانات بيانيا

١ ــ مقدمة:

بعد جمع البيانات من الميدان ومراجعتها مكتبياً وتلخيصها، يجب عرضها بطريقة ما لكي يسهل تفهمها والإلمام بها وذلك بعرضها في جداول أو في رسوم بيانية أو بحساب مقياس أو أكثر من المقاييس الإحصائية. وفي مجالنا هذا سنعطي فكرة واضحة عن طرق عرض البيانات بيانياً على أن نتعرض في الأبواب التالية لعرض البيانات جدولياً ولحساب المقاييس الإحصائية المختلفة.

٢ ــ عرض البيانات بيانيا:

تعتبر الرسوم البيانية وسيلة مفيدة وفعالة لتوضيح وشرح الحقائق الرقمية وإبراز العلاقة بين المتغيرات واستقراء إتجاهاتها العامة بأسلوب يسهل فهمه وتذكره بمجرد النظر. وتختلف الرسوم البيانية حسب طبيعة ونوع البيانات المراد عرضها، وإن كان أهم هذه الأشكال هي:

(١) الأعمدة البيانية البسيطة:

وهي عبارة عن مجموعة من الأعمدة الرأسية أو المستطيلات المتساوية القاعدة والتي تتناسب إرتفاعها مع البيانات التي تمثلها، وتستخدم لإظهار التطور الذي يطرأ على ظاهرة ما على مدار عدة سنوات. وعادة يؤخذ المحور الرأسي لتمثيل قيم الظاهرة، والمحور الأفقي لتمثيل الزمن. ونرسم عموداً يمثل قيم الظاهرة محل الدراسة في كل سنة بحيث يتناسب طول كل عمود مع العدد الذي يمثله، ويجب مراعاة أن يقسم المحور الرأسي بحيث يسمح مقياس الرسم باظهار جميع قيم الظاهرة، كذلك يراعى أن تكون المسافات بين الأعمدة متساوية.

مثال رقم (١):

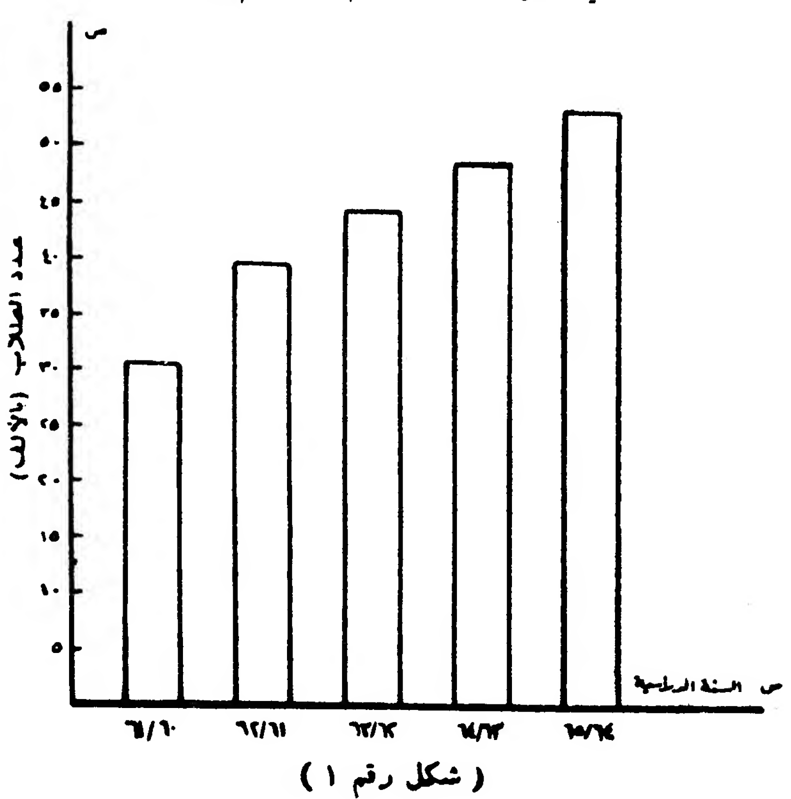
الجدول الآتي يوضح أعداد الطلاب المقيدين بإحدى الجامعات في السنوات الدراسية ١٩٦١/٦٠ حتى ١٩٦٥/٦٤.

السنة الدراسية	٦١/٦٠	٦٢/٦١	٦٣/٦٢	٦٤/٦٣	٦٥/٦٤
عدد الطلاب (بالألف)	٣١	٤٠	٤٥	٤٩	٥٤

وبتمثيل بيانات هذا الجدول بالأعمدة البسيطة نحصل على الشكل الآتي:

عدد الطلاب المقيدين بالجامعات

في السنوات الدراسية ٦٠/٦١ـ ٦٤/١٩٦٥



(شكل رقم ١)

و واضح أن هذا الشكل يعطي فكرة سريعة و واضحة عن تطور الظاهرة محل الدراسة ، علاوة على أنه شكل واضح و بسيط .

(ب) الأعمدة البيانية المزدوجة:

تستخدم إذا كان الهدف من الرسم هو مقارنة ظاهرتين أو أكثر لعدة سنوات أو إذا كان لدينا بيانات مزدوجة لخواص مختلفة . ونحصل عليها برسم عمودين ملتصقين يمثلان قيم الظاهرتين محل الدراسة في كل سنة (أو لكل خاصية) بحيث يتناسب طول العمود مع العدد الذي يمثله ، ونفرق بين الأعمدة بالتظليل أو بالألوان المختلفة ونوضح ذلك على الرسم ، مع ضرورة مراعاة أن تكون قواعد المستطيلات متساوية والمسافات بينها متساوية .

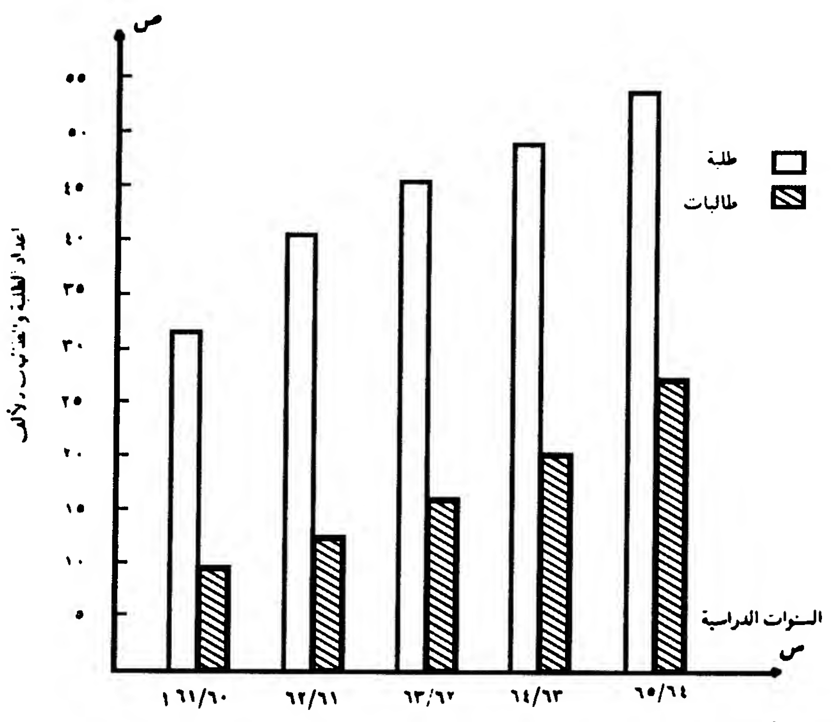
مثال رقم ٢ :

الجدول الآتي يوضح أعداد الطلاب المقيدين بإحدى الجامعات في السنوات الدراسية ٦١/٦٠ حتى ١٩٦٥/٦٤ .

السنة الدراسية		٦١/٦٠	٦٢/٦١	٦٣/٦٢	٦٤/٦٣	٦٥/٦٤
عدد الطلاب بالألف	طلبة	٣١	٤٠	٤٥	٤٩	٥٤
	طالبات	٩	١٢	١٦	٢٠	٢٧

و بتمثيل بيانات الجدول السابق بيانياً بالأعمدة المزدوجة ، نحصل على الشكل الآتي :

عدد الطلبة والطالبات المقيدين بالجامعات
في السنوات الدراسية ٦١/٦٠ ــ ١٩٦٥/٦٤

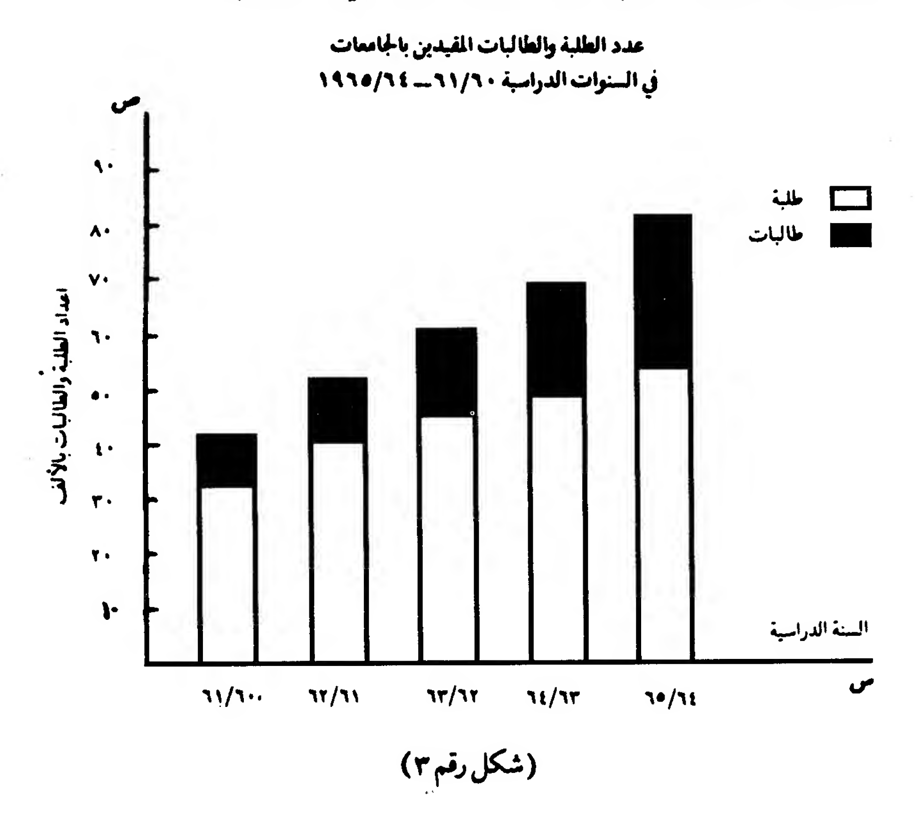


(جـ) الأعمدة المجزأة :

وتستخدم في نفس الحالات التي تستخدم فيها الأعمدة البيانية المزدوجة و يتم الحصول عليها برسم عمود واحد يمثل جملة الظواهر محل الدراسة في كل سنة ــ كما في حالة الأعمدة البسيطة ــ ثم

نقسم كل عمود إلى مكوناته بحيث يتناسب كل جزء مع العدد الذي يمثله ونميز بين هذه الأجزاء بالتظليل أو بالألوان المختلفة ونوضح ذلك على الرسم.

و بتطبيق ذلك على المثال رقم (٢) نحصل على الشكل الآتي (شكل رقم ٣).



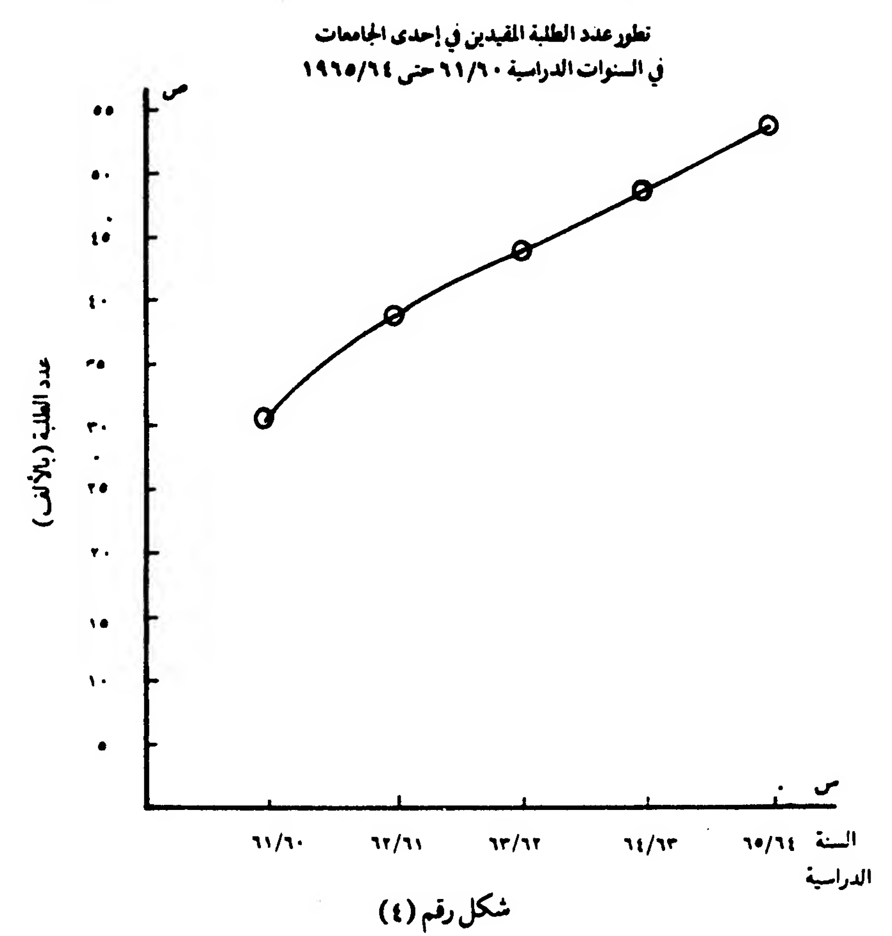
(شكل رقم ٣)

(د) المنحنى:

يستخدم أساساً لتوضيح الاتجاه العام للظاهرة خلال فترة من الزمن، و يتم الحصول عليه بتوقيع مجموعة من النقط على مستوى المحاور، يمثل المحور الأفقي الزمن والمحور الرأسي قيم الظاهرة ثم توصل هذه النقط ببعضها بمنحنى متصل فنحصل على خط متصل يسمى المنحنى.

مثال رقم (٣) :

برسم البيانات الواردة في مثال رقم (١) باستخدام المنحنى نحصل على الشكل الآتي :



شكل رقم (٤)

(هـ) الرسم الدائري (الدائرة) :

تستخدم الدائرة إذا كانت بيانات الظاهرة موضوع الدراسة عبارة عن مجموع عام مقسم إلى أجزائه المختلفة ، وتمثل المساحة الكلية للدائرة المجموع الكلي ثم تقسم الدائرة إلى قطاعات تتناسب مساحة كل منها مع الأجزاء التي يتكون منها هذا المجموع ، ونميز بين هذه القطاعات بالتظليل أو الألوان المختلفة .

وفيما يلي خطوات رسم الدائرة وتقسيمها إلى قطاعات :

١ ــ يتم رسم الدائرة بعد اختيار نصف قطر مناسب لها .

٢ــ تحسب الزاوية المقابلة لكل قطاع من العلاقة الآتية :

$$\text{زاوية القطاع} = \frac{\text{قيمة القطاع}}{\text{المجموع العام}} \times \text{الزاوية المركزية الدائرة } (٣٦٠^\circ)$$

و يراعى أن يكون مجموع زوايا القطاعات المختلفة مساو ياً للزاوية المركزية للدائرة .

٣ــ تقسم الدائرة إلى قطاعاتها المختلفة بتحديد مساحة كل قطاع على الدائرة وذلك بتقسيم الزاوية المركزية للدائرة إلى زوايا القطاعات المختلفة .

ويمكن استبدال الدائرة بنصفها أو ربعها وفي هذه الحالة تكون الزاوية المركزية ١٨٠°، ٩٠° على التوالي .

مثال رقم (٤) :

الجدول الآتي يوضح مساحة القارات بالمليون كيلومتر مربع :

القارة	أفريقيا	آسيا	أوروبا	الأمريكتين	استراليا	المجموع
المساحة بالمليون كيلو متر مربع	٣٠	٥٠	٥	٤٧	٨	١٤٠

والمطلوب تمثيل هذه البيانات بيانياً باستخدام الدائرة .

الحل

تتبع الخطوات الآتية :

١ ــ نرسم الدائرة المناسبة .

٢ ــ نحدد زاوية كل قطاع كما يلي :

$$\text{زاوية القطاع الاول (افريقيا)} = \frac{٣٠}{١٤٠} \times ٣٦٠^\circ = ٧٧,١^\circ$$

$$\text{زاوية القطاع الثاني (آسيا)} = \frac{٥٠}{١٤٠} \times ٣٦٠^\circ = ١٢٨,٦^\circ$$

$$\text{زاوية القطاع الثالث (أوربا)} = \frac{٥}{١٤٠} \times ٣٦٠^\circ = ١٢,٩^\circ$$

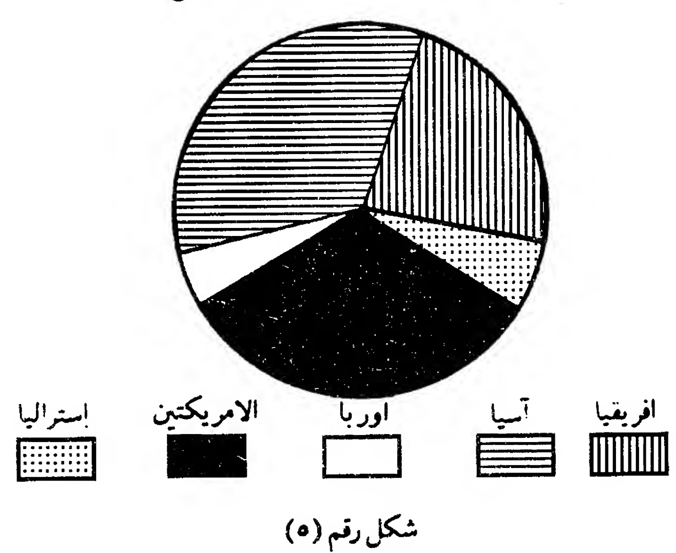
$$\text{زاوية القطاع الرابع (الأمريكتين)} = \frac{٤٧}{١٤٠} \times ٣٦٠^\circ = ١٢٠,٨^\circ$$

زاوية القطاع الخامس (استراليا) = $\frac{٨}{١٤٠}$ × ٣٦٠° = ٢٠,٦°

المجموع ٣٦٠°

٣ــ نقسم الدائرة إلى قطاعاتها كما سبق شرحه فنحصل على الرسم المطلوب كما هو واضح في الشكل الآتي:





شكل رقم (٥)

٣ــ مزايا وعيوب الرسوم البيانية:

(أ) المزايا:

١ــ تثير انتباه المشاهد خاصة إذا كانت جيدة التصميم.

٢ــ توفر وقت المشاهد، إذ أن استنباط الحقائق من الرسوم البيانية أسرع من الوصول إليها بواسطة الأرقام الموضوعة في جداول.

٣ــ إمكان معرفة الاتجاهات العامة للظواهر.

٤ــ سهولة فهم وتذكر العلاقات بين الظواهر محل الدراسة.

(ب) العيوب:

١ــ التضحية بدقة البيانات، إذ أن الرسوم البيانية توضح فقط التغيرات العامة للظواهر ولا تبين التفاصيل الدقيقة لها.

٢ــ أحيانا تكون الرسوم معقدة، خاصة إذا كانت تشتمل على مجموعات من البيانات المتباينة.

٣ــ كثرة التكاليف خاصة إذا كانت البيانات تحتاج إلى مقياس رسم كبير.

أمثلة عامة

مثال عام رقم (١):

البيانات الآتية تبين توزيع جملة الإنفاق بملايين الريالات على الخدمات الحكومية عامي ٥٩/١٩٦٠، ٦٠/١٩٦١ في إحدى البلاد:

البيـــان	أجور	مصروفات إدارية	استثمارات	تحويلات	الجملة
٥٩/١٩٦٠	١٤٠	٧٠	٨٠	٤٦	٣٣٦
٦٠/١٩٦١	١٧٠	٨٠	٨٦	٦٤	٤٠٠

والمطلوب عرض هذه البيانات بيانياً باستخدام:

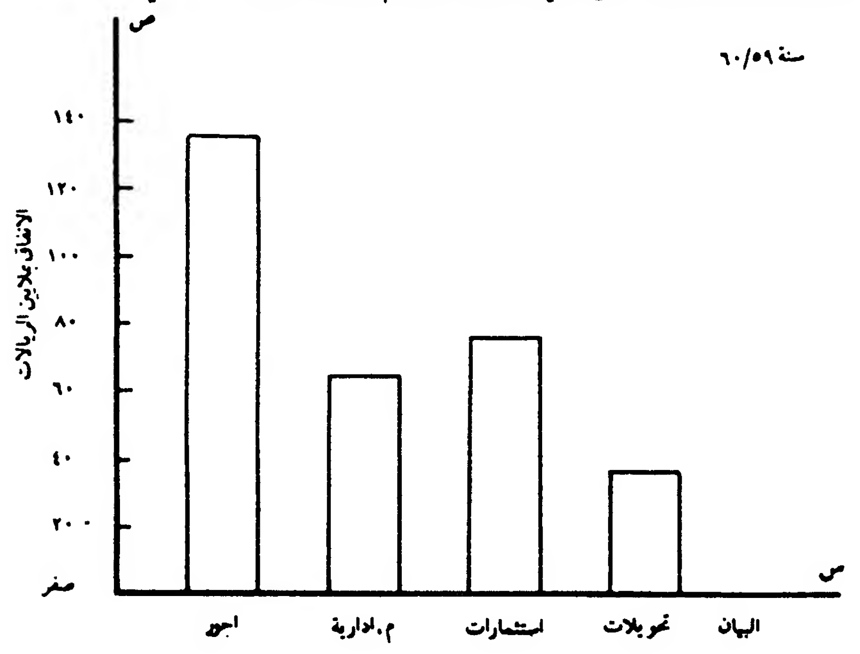
١ـ الأعمدة   ٢ـ الرسم الدائري.

الحل

١ـ الأعمدة:

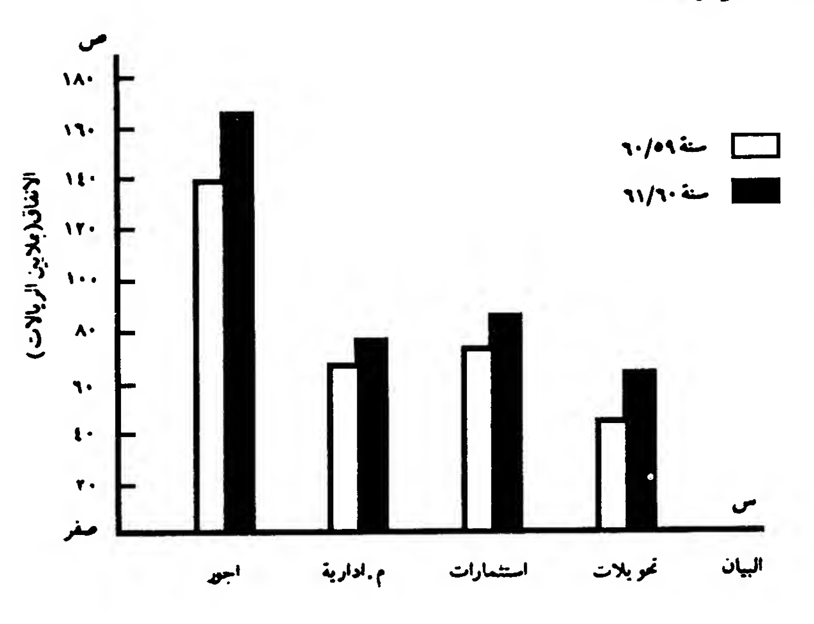
(أ) الأعمدة البسيطة:

ـ طالما يوجد لدينا بيانات عن سنتين، فلا بد من رسم كل سنة على حدة كما يلي:



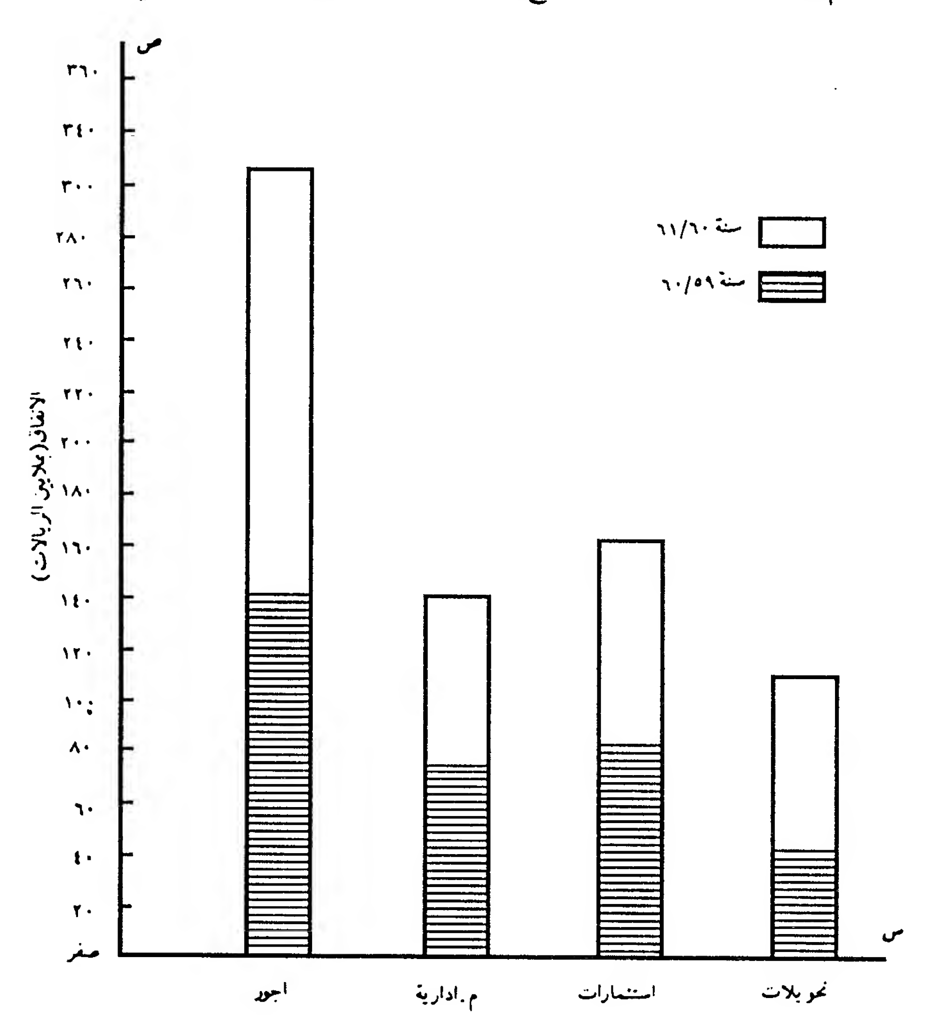
ص
١٨٠
١٦٠
١٤٠
١٢٠
١٠٠
٨٠
٦٠
٤٠
٢٠
صفر
الانفاق بملايين الريالات
سنة ٦١/٦٠
اجور
م. ادارية
استثمارات
تحويلات
البيان
س

(ب) الأعمدة المزدوجة:



(جـ) الأعمدة المجزأة:

وفيها يتم رسم عمود لكل نوع من أنواع الإنفاق عبارة عن مجموع الإنفاق في السنتين محل الدراسة، ثم يجزأ العمود إلى اجزاء تتناسب مع العدد الذي تمثله فنحصل على الشكل الآتي:



ـ الرسم الدائري:

(أ) طالما لدينا بيانات عامين فلا بد من رسم دائرتين مستقلتين، ويمكن أن تكون الدائرتان متساويتين في الحجم أو أحدهما أكبر من الأخرى حسب بيانات كل منها.

(ب) نحدد زاوية كل قطاع لكل دائرة كما يلي:

$$\text{زاوية القطاع} = \frac{\text{قيمة القطاع}}{\text{المجموع العام}} \times \text{الزاوية المركزية للدائرة.}$$

وبتطبيق ذلك على مثالنا هذا نحصل على الزوايا الآتية في عامي ١٩٦٠/٥٩، ١٩٦١/٦٠ على التوالي:

– سنة ١٩٦٠/٥٩:

زاوية القطاع الأول (أجور) $= \frac{١٤٠}{٣٣٦} \times ٣٦٠° = ١٥٠°$

زاوية القطاع الثاني (مصروفات إدارية) $= \frac{٧٠}{٣٣٦} \times ٣٦٠° = ٧٥°$

زاوية القطاع الثالث (إستثمارات) $= \frac{٨٠}{٣٣٦} \times ٣٦٠° = ٨٦°$

زاوية القطاع الرابع (تحويلات) $= \frac{٤٦}{٣٣٦} \times ٣٦٠° = ٤٩°$

المجموع ٣٦٠°

– سنة ١٩٦١/٦٠:

زاوية القطاع الأول (اجور) $= \frac{١٧٠}{٤٠٠} \times ٣٦٠° = ١٥٣°$

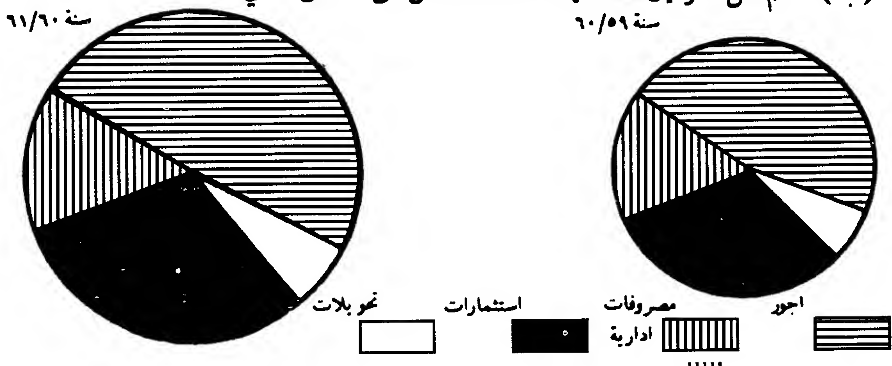
زاوية القطاع الثاني (مصروفات إدارية) $= \frac{٨٠}{٤٠٠} \times ٣٦٠° = ٧٢°$

زاوية القطاع الثالث (استثمارات) $= \frac{٨٦}{٤٠٠} \times ٣٦٠° = ٧٧°$

زاوية القطاع الرابع (تحويلات) $= \frac{٦٤}{٤٠٠} \times ٣٦٠° = ٥٨°$

المجموع ٣٦٠°

(جـ) نقسم كل دائرة إلى قطاعاتها المختلفة فنحصل على الشكل الآتي:



مثال عام رقم (٢):

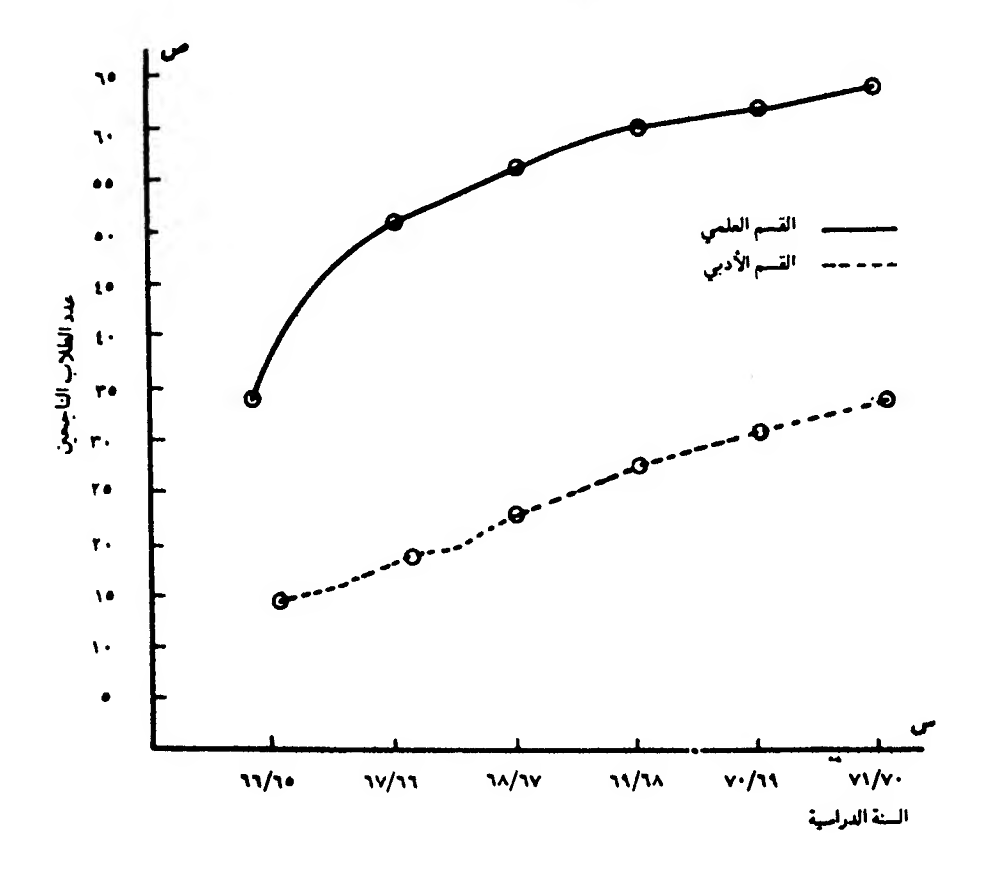
الجدول الآتي يوضح تطور عدد الطلاب الناجحين (بالألف) في إمتحان الثانوية العامة بإحدى البلاد في السنوات الدراسية ١٩٦٦/٦٥ حتى ١٩٧١/٧٠.

السنة الدراسية	٦٦/٦٥	٦٧/٦٦	٦٨/٦٧	٦٨ ٦٩	٧٠/٦٩	٧١/٧٠
القسم العلمى	٣٤	٥١	٥٦	٦٠	٦٢	٦٤
القسم الأدبى	١٢	١٨,٥	٢٣	٢٧,٥	٣٠	٣٢,٥

والمطلوب تمثيل هذه البيانات بإستخدام المنحنى.

الحل

يوجد لدينا ظاهرتان تتفقان في وحدة القياس، لذلك نخصص المحور الرأسي لهما. والمحور الأفقي للزمن، فنحصل على الشكل الآتي:



تمارين

١ــ الجدول الآتي يوضح إنتاج بعض الصناعات الهامة في بلد ما بملايين الريالات عام ١٩٦٥ والمطلوب تمثيل هذه البيانات بيانياً باستخدام الرسم الدائري

الصناعات	الصناعات المعدنية	الصناعات الهندسية	الصناعات الغذائية	الغزل والنسيج
قيمة الإنتاج	٥٠٠	٤٥٠	٣٠٠	٢٥٠

٢ــ الجدول الآتي يوضح الواردات والصادرات لبلد ما في السنوات من ١٩٦٠ حتى ١٩٦٩ بملايين الريالات.

السنة	٦٠	٦١	٦٢	٦٣	٦٤	٦٥	٦٦	٦٧	٦٨	٦٩
الواردات	١٢	١٦	٢٠	٢٥	٢٩	٣٤	٣٨	٤١	٤٥	٥٣
الصادرات	٢٠	٢٤	٣٠	٣٥	٣٩	٤٤	٥٠	٥٦	٦٣	٦٨

والمطلوب تمثيل هذه البيانات باستخدام:

(أ) المنحنى (ب) الأعمدة البيانية المزدوجة.

(جـ) الأعمدة البيانية المجزأة.

٣ــ الجدول الآتي يوضح حركة الركاب بمطارات إحدى البلاد عامي ١٩٦٨، ١٩٧٢.

السنة	عدد الركاب (بالألف)			
	قادمون	راحلون	عابرون	الجملة
١٩٦٨	١٦٠	١٥٧	٥٣	٣٧٠
١٩٧٢	٣٥٢	٣٥٤	١٧٩	٨٨٥

والمطلوب تمثيل هذه البيانات باستخدام:

(أ) الأعمدة البيانية المزدوجة. (ب) الأعمدة البيانية المجزأة.

(جـ) الدائرة.

٤ ـ الجدول الآتي يوضح توزيع عينة من الأفراد حسب حالتهم الزواجية .

الحالة الزواجية	لم يتزوج ابداً	متزوج	مطلق	أرمل	الجملة
عدد الأفراد	٣٠٠	٥٠٠	١٥٠	٥٠	١٠٠٠

والمطلوب تمثيل هذه البيانات بيانيا باستخدام الدائرة .



الباب الثاني

التوزيعات التكرارية وتمثيلها بيانيا



التوزيعات التكرارية

١ ـ مقدمة:

تناولنا طرق العرض والتمثيل البياني للقراءات غير المبوبة، وهنا سنتناول النوع الآخر من البيانات وهو النوع الأكثر استخداماً في الابحاث الإحصائية وهو ما يعرف «بالبيانات المبوبة». وسنتعرض فيه لكيفية تلخيص البيانات ووضعها في الجداول وهو ما نطلق عليه عرض أو تصنيف البيانات جدولياً، ثم نتناول بعد ذلك طرق تمثيل هذه الجداول بيانياً.

٢ ـ التوزيعات التكرارية:

تمر العملية الإحصائية بمراحل متعددة تبدأ بمرحلة التصميم ثم تليها مرحلة جمع البيانات ومراجعتها ميدانياً، وأخيراً مرحلة التجهيز بما تشمله من مراجعة مكتبية وترميز وتثقيب وتبويب البيانات ثم إعدادها للنشر في جداول إحصائية تكشف عن الخصائص الرئيسية للمجتمع موضوع الدراسة.

فمثلا، إذا كان مجتمع البحث يتكون من ٥٠٠ منشأة وجمعنا بيانات عن المشتغلين في كل منها فإنه يتعذر الإلمام ببيانات هذا المجتمع ودراستها دون تصنيفها وتبويبها في جداول إحصائية مبسطة تبين الخصائص التي يراد دراستها كتوزيع المنشآت حسب عدد المشتغلين أو توزيع المشتغلين حسب المهنة أو حسب فئات الأجر.. إلخ.

ولكي نضع البيانات في جداول إحصائية يجب أولا تقسيم البيانات إلى مجموعات متشابهة تسمى «فئات» ونضع في كل فئة المفردات التي تنتمي إليها (أو بمعنى آخر نوجد عدد مرات تكرار الفئات) ثم نضع هذه الفئات وتكراراتها في جداول و يطلق على الفئات لفظ «الفئات التكرارية»، وكل جدول يحتوى على عدد من هذه الفئات التكرارية يسمى «جدولا تكرارياً». وقبل الدخول في طريقة عمل الجداول التكرارية يجب أولا أخذ فكرة عن أنواع البيانات الإحصائية لأن لكل منها طرقاً خاصة لعرضها في الجداول التكرارية:

وبصفة عامة تنقسم البيانات الإحصائية إلى:

(أ) بيانات وصفية (نوعية)
(ب) بيانات كمية (رقمية)

(أ) البيانات الوصفية (النوعية):

وتعرف بأنها «البيانات التي لا تأخذ أرقاماً عددية بل تكون كلها صفات»، مثل الحالة الزواجية والحالة التعليمية والمهنة والنشاط الاقتصادي.. إلخ.

فمثلا، بيانات الحالة الزواجية تنحصر في «لم يتزوج ابداً ــ متزوج ــ مطلق ــ أرمل». وكذلك الحال بالنسبة لباقي البيانات الوصفية الأخرى. وهذه البيانات يتم وضعها في الجدول التكراري بحصر الصفات التي تشملها هذه البيانات ثم إيجاد المفردات التي تنتمي لكل صفة.

مثال رقم (١):

البيانات الآتية تمثل المرتبة الأكاديمية لعينة من ٣٠ من أعضاء هيئة التدريس بإحدى الجامعات:

أستاذ مشارك	أستاذ مساعد	محاضر	أستاذ مشارك	أستاذ مساعد
محاضر	أستاذ	أستاذ مساعد	محاضر	أستاذ مشارك
أستاذ مشارك	أستاذ مساعد	أستاذ مشارك	أستاذ	أستاذ مساعد
أستاذ مساعد	محاضر	أستاذ مشارك	أستاذ مساعد	أستاذ
أستاذ مشارك	أستاذ مساعد	محاضر	أستاذ مشارك	أستاذ مشارك
محاضر	أستاذ مساعد	أستاذ مشارك	محاضر	أستاذ

فلوضع هذه البيانات في جدول تكراري نتبع الخطوات الآتية:

١ ــ نرسم جدولا من ثلاثة أعمدة، الأول للمرتبة الأكاديمية والثالث لعدد أعضاء هيئة التدريس أما العمود الثاني فيكون أكبر من العمودين الأول والثالث ويخصص لوضع العلامات أمام المراتب الأكاديمية المختلفة.

٢ ــ نضع المرتبة الأكاديمية التي لدينا وهي «أستاذ ــ أستاذ مشارك ــ أستاذ مساعد ــ محاضر» في العمود الأول من الجدول، ثم نأخذ المرتبة العلمية لكل عضو هيئة تدريس واحداً بعد الآخر ونضع شرطة مائلة (/) لكل مرتبة نأخذها أمام الصفة المناظرة وذلك في العمود الثاني للجدول. وتسهيلا لعلمية العد نضع الشرطة الخامسة على صورة خط مائل عكسي يقطع الخطوط الأربعة السابقة فنحصل على ما يسمى «بالحزمة».

٣ ــ تترجم العلامات الموجودة أمام كل مرتبة علمية إلى أرقام (تكرارات) ونضعها في العمود

الثالث من الجدول . ويجب أن يكون عدد التكرارات مساو يأ لعدد الحالات التي أعد لها الجدول .

و يسمى الجدول في هذه الحالة « بالجدول التفريغي » كما يتضح من الجدول الآتي :

جدول رقم (١)

جدول تفريغي يوضح توزيع عينة من أعضاء هيئة التدريس في إحدى الجامعات حسب المرتبة الأكاديمية

المرتبة الاكاديمية	العلامات	عدد أعضاء هيئة التدريس (التكرار)
أستاذ	////	٤
أستاذ مشارك	~~////~~ ~~////~~	١٠
أستاذ مساعد	~~////~~ ////	٩
محاضر	~~////~~ //	٧
الجملة	—	٣٠

٤ ـ نأخذ العمودين الأول والثالث من الجدول التفريغي السابق، فنحصل على «الجدول التكراري» كما يتضح من الجدول الآتي:

جدول رقم (٢)

توزيع عينة من أعضاء هيئة التدريس بإحدى الجامعات حسب المرتبة الأكاديمية

المرتبة الأكاديمية	عدد أعضاء هيئة التدريس (التكرار)
أستاذ	٤
أستاذ مشارك	١٠
أستاذ مساعد	٩
محاضر	٧
الجملة	٣٠

و يسمى هذا الجدول «جدولا تكرارياً بسيطاً» لأن البيانات التي يشملها تتوزع حسب خاصية أو صفة واحدة فقط وهي المرتبة الأكاديمية.

(ب) البيانات الكمية (الرقمية):

«وهي البيانات التي تأخذ قيماً عددية وذلك إذا كانت الظاهرة موضوع الدراسة قابلة للقياس»، مثل بيانات السن والدخل وعدد أفراد الأسرة.. إلخ.

والبيانات الكمية (الرقمية) تكون إما في صورة:

١ــ متغيرات متصلة. ٢ــ متغيرات منفصلة.

والمتغيرات المتصلة: تعرف بأنها المتغيرات التي يمكن أن تأخذ جميع القيم بين حدي التغير، مثل أوزان مجموعة من الأفراد فإنها يمكن أن تأخذ أي قيمة كسرية حسب درجة الدقة التي روعيت في ميزان الأفراد، وما يقال عن الأوزان يقال عن الأطوال والعمر وغيرها من المتغيرات المتصلة.

أما المتغيرات المنفصلة: فهي المتغيرات التي لاتمكنها طبيعتها من أن تأخذ جميع القيم بين حدي التغير، مثل عدد أفراد الأسرة فهو يأخذ أرقاماً صحيحة ١، ٢، ٣. إلخ. ولكنه لا يأخذ أرقاماً كسرية إذ لا يعقل أن يكون عدد الأفراد $\frac{١}{٢}$ ٢ فرد مثلا، وما يقال عن عدد الأفراد يقال عن عدد الحوادث على إحدى الطرق وعدد المرضى بأحد المستشفيات وغيرها من المتغيرات المنفصلة.

ولتبويب البيانات الكمية في جداول تكرارية، نقسم البيانات إلى مجموعات متشابهة تسمى فئات ونضع في كل فئة المفردات التي تنتمي إليها، ثم نضع هذه الفئات في الجدول فنحصل على الجدول التكراري. ولا توجد قاعدة محددة لتعين طول الفئة أو عدد الفئات في الجدول التكراري، وعملية تحديد عدد الفئات وطول كل منها وإن كانت تعتمد على الخبرة في المقام الأول إلا أنه يمكن القيام بها بطرح أصغر قيمة من أكبر قيمة في البيانات المراد تلخيصها فنحصل على ما يسمى بالمدى المطلق للبيانات، وهو المدى الذي تنتشر فيه بيانات البحث، ثم نقسمه إلى عدد مناسب من الفئات (لايقل عن سته ولا يزيد عن إثنى عشر) آخذين في الاعتبار ما يلي:

(١) ألا يكون طول الفئة كبيراً و بالتالي عدد الفئات صغيراً فتضيع معالم المجتمع.
(٢) ألايكون طول الفئة صغيراً و بالتالي عدد الفئات كبيراً، فينتفي الهدف من تلخيص البيانات في فئات. و بذلك نحصل على طول كل فئة، مع ملاحظة أن الفئة الأولى لابد وأن تشمل أو تبدأ بأصغر قيمة وأن تشمل الفئة الأخيرة أو تنتهي بأكبر قيمة حسب طبيعة البيانات.

مثال رقم (٢):

البيانات الآتية توضح الأجور اليومية التي حصل عليها ١٠٠ عامل في أحد المصانع بالريال:

٨١	١٠٠	٨٠	٩٣	٧٠	١١٥	٦٢	١١٦	٧٨	٩٦
٨٣	٩٤	٧٠	٩٤	٩٥	٩٥	٩٣	٩٦	٩٧	١٢٨
٩٨	٨٤	٦٦	١٠٧	٨٢	٩٧	٧٢	١١٨	٩٨	١٠١
٨٣	١١٠	٩٩	٩٨	٩٢	١٢٥	١١٧	٩٣	٧٣	١١٩
٩٩	٨٥	٨٤	٦٥	١٠٦	٧٧	١٠٨	١١٣	٩٤	٧١
٨٠	٩٠	٧٢	١٢٠	١١١	٩٢	١٠٢	٧٤	٩٩	١١٤
٩١	٩٢	٨٥	١٠١	٨١	٦٧	٩١	١١٢	١٢٢	١٠٩
٨٦	٩٠	٨٦	٨٨	٧٧	٩٥	٧٢	١٠٥	٨٩	٧٥
١٢٩	١٠٢	٨٧	٩١	١٠٣	١٠٣	٨٨	٦٩	٨٦	١٠٤
٧٥	٩٠	٨٧	١٠٩	٩٦	٧٩	٨٢	٨٩	١٠٥	٩٧

فلتصنيف هذه البيانات في جدول تكراري نتبع الخطوات الآتية:

١ــ نحسب المدى المطلق للبيانات وهو ١٢٩ - ٦٢= ٦٧ ريالاً.

٢ــ نختار طولا مناسباً للفئة وذلك حسب الملاحظات السابقة.

٣ــ بقسمة المدى المطلق على طول الفئة نحصل على عدد الفئات التي يشملها الجدول التكراري.

وفي مثالنا هذا نجد أن أنسب طول للفئة هو (١٠)، و بذلك يكون عدد الفئات التي لدينا سبع فئات متساو ية طول كل منها ١٠.

تشمل الفئة الأ ولى الأجور من ٦٠ إلى ٦٩ ويمكن كتابتها ٦٠ــ ٦٩.

وتشمل الفئة الثانية الأجور من ٧٠ إلى ٧٩ ويمكن كتابتها ٧٠ــ ٧٩، وهكذا حتى الفئة الأخيرة فتشمل الأجور من ١٢٠ إلى ١٢٩ ويمكن كتابتها ١٢٠ــ ١٢٩.وكتابة الفئات بهذه الصورة [٦٠ــ ٦٩، ٧٠ــ ٧٩، ٨٠ــ ٨٩٠٠، ١٢٠ــ ١٢٩]، يجعل هناك فجوة بين كل فئة والتالية لها قد يؤثر على توزيع البيانات على الفئات المختلفة و يؤدي إلى الكثير من المشاكل في الحياة العملية. فمثلا إذا كانت الأجور التي حصل عليها أحد العمال هي ٧٩٫٥ ريالا ففي أي فئة تقع، هل الفئة الثانية أم الفئة الثالثة؟ وللتغلب على هذه المشكلة اتفق على كتابة الفئات بالصورة: ٦٠ــ، ٧٠ــ، ٨٠ــ، ٠٠ ٠٠ ٠٠، ١٢٠ــ أي أن الفئة الأ ولى تشمل جميع القيم من ٦٠ حتى

أقل من ٧٠ [بداية الفئة الثانية] مباشرة، والفئة الثانية تشمل جميع القيم من ٧٠ حتى أقل من ٨٠ [بداية الفئة الثالثة] مباشرة وهكذا بالنسبة لباقي الفئات حتى الفئة الأخيرة فتشمل جميع القيم من ١٢٠ حتى أقل من ١٣٠ مباشرة. و بالرغم من عدم وجود فئة تالية للفئة الأخيرة [١٢٠ـــ] فإن تحديد نهايتها (حدها الأعلى) يكون سهلا لأن أطوال الفئات في مثالنا هذا متساو ية.

٤ـــ نرسم جدولا تفريغياً كما في حالة البيانات الوصفية، مع اختلاف واحد وهو أن العمود الأ ول يشمل فئات المتغيرـــ الأجور في مثالنا هذا!ـــ ثم نوزع البيانات التي لدينا على الفئات التي تنتمي إليها بنفس الأسلوب السابق شرحه في حالة البيانات الوصفية، فتحصل على الجدول التفريغي الآتي [جدول رقم (٣)].

جدول رقم (٣)

جدول تفريغي يوضح توزيع الأجور التي حصل عليها ١٠٠ عامل من أحد المصانع

فئات الأجر (بالريال)	العلامـــــات	عدد العمال (التكرار)
٦٠ ــ	////	٥
٧٠ ــ	//// //// ////	١٥
٨٠ ــ	//// //// //// ////	٢٠
٩٠ ــ	//// //// //// //// //// ////	٣٠
١٠٠ ــ	//// //// ////	١٥
١١٠ ــ	//// ////	١٠
١٢٠ ــ ١٣٠	////	٥
الجملـــة	ــــــــ	١٠٠

٥ـــ باستبعاد العمود الأ وسط من الجدول التفريغي السابق نحصل على الجدول التكراري المطلوب [جدول رقم (٤)] كما يلي:

جدول رقم (٤)
توزيع الأجور التي حصل عليها
١٠٠ عامل في أحد المصانع

فئات الأجر (بالريال)	عدد العمال (التكرار)
٦٠ —	٥
٧٠ —	١٥
٨٠ —	٢٠
٩٠ —	٣٠
١٠٠ —	١٥
١١٠ —	١٠
١٢٠ — ١٣٠	٥
الجملة	١٠٠

ومما يجدر الإشارة إليه في هذا المجال أنه بعد توزيع القيم الأصلية على الفئات داخل الجدول التكراري تختفي هذه القيم وتضيع معالمها وكل ما يمكن معرفته عن أي منها أنها واحدة من مفردات فئة معينة في الجدول وتأخذ قيمة مركز (منتصف) هذه الفئة. ومركز الفئة يعرف بأنه الحد الأدنى للفئة (بداية الفئة) + ١/٢ طول الفئة.

$$\text{أو مركز الفئة} = \frac{\text{بداية الفئة (الحد الأدنى لها)} + \text{نهاية الفئة (الحد الأعلى لها)}}{٢}$$

ففي الجدول رقم (٤) نجد أن هناك خمسة عمال حصل على كل منهم على أجر قدره ٦٥ ريالا في المتوسط (مركز الفئة الأولى)، خمسة عشر عاملا حصل كل منهم على أجر قدره ٧٥ ريالا في المتوسط (مركز الفئة الثانية) وهكذا مما يؤكد ضرورة توخي الدقة والعناية الكافية عند تحديد عدد الفئات.

والجدول السابق يسمى «جدولا تكرارياً بسيطاً» لأن بياناته تمثل ظاهرة واحدة فقط وهي توزيع أجور ١٠٠ عامل في أحد المصانع.

التمثيل البياني للتوزيعات التكرارية

١ــ مقدمة:

بعد أن ينتهي الباحث من جمع البيانات من الميدان وتبويبها في جداول تكرارية تشتمل على التوزيع التكراري للبيانات الخاصة بالظاهرة محل الدراسة فإنه يقوم بعرض هذه الجداول بيانياً .

و يتم عرض التوزيعات التكرارية بيانياً بإحدى الطرق الآتية :

(أ) المدرج التكراري .
(ب) المضلع التكراري .
(جـ)المنحنى التكراري .
وفيما يلي عرض كل من هذه الطرق .

(أ) المدرج التكراري:

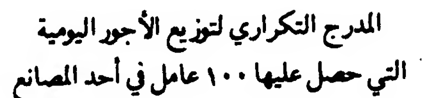
وهو يشبه شكل الأعمدة البيانية أو المستطيلات السابق الإشارة إليه في الباب الأول ، إلا أنه يختلف عنه في كون مستطيلاته متلاصقة . ولرسم المدرج التكراري تتبع الخطوات الآتية :

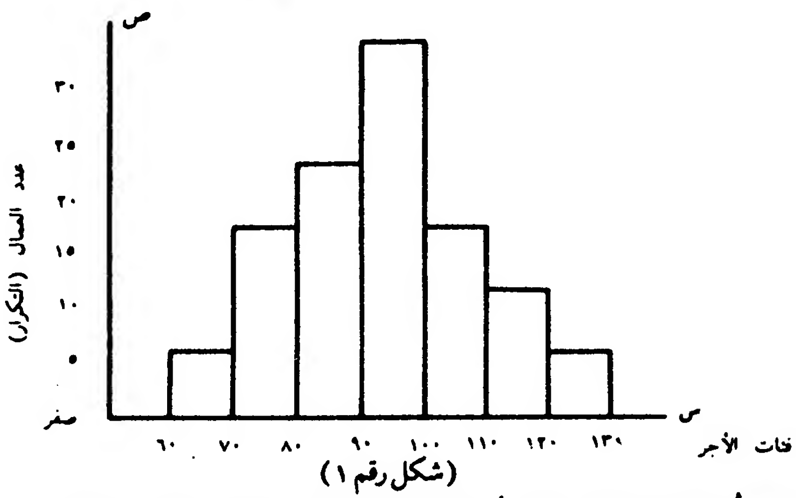
١ــ نرسم محورين متعامدين نخصص المحور الأفقي للفئات (قيم المتغير) والمحور الرأسي للتكرارات (عدد المفردات) .

٢ــ نقسم المحور الأفقي إلى أقسام متساوية ، كل قسم عبارة عن طول الفئة بحيث يكفي لتمثيل كافة الفئات ، وندرج المحور الرأسي إبتداء من الصفر بحيث يسمح بظهور أكبر تكرار في الجدول التكراري .

٣ــ نرسم مستطيلا على كل فئة قاعدته تساوى طول الفئة وارتفاعه يساوى تكرار هذه الفئة ، وبذلك نحصل على شكل عبارة عن مجموعة من المستطيلات المتلاصقة وهو ما يعرف بالمدرج التكراري .

فإذا أردنا رسم المدرج التكراري للمثال رقم (٢) نجد أن التوزيع يشتمل على سبع فئات متساوية ، لذلك نقسم المحور الأفقي إلى سبعة أقسام متساوية تبدأ من ٦٠ حتى ١٢٠ وندرج المحور الرأسي ابتداء من الصفر وحتى ٣٠ وهو أكبر تكرار في الجدول . ثم نرسم على كل فئة مستطيلا قاعدته طول الفئة وارتفاعه التكرار المقابل لهذه الفئة و بذلك نحصل على الشكل المطلوب (شكل رقم ١).



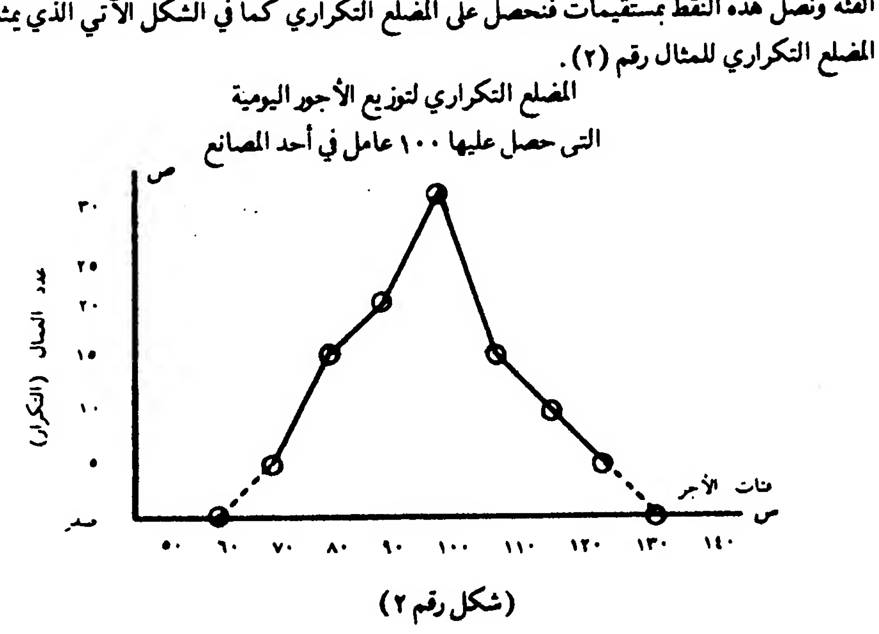


(شكل رقم ١)

مع ملاحظة أن عدد المستطيلات لابد وأن يساوى عدد الفئات الموجودة في الجدول التكراري.

(ب) المضلع التكراري:

ونحصل عليه بتقسيم المحورين كما في حالة المدرج التكراري تماماً، ثم نضع نقطاً في المستوى بحيث يكون الأحداثي السيني لأي نقطة هو مركز الفئة والأحداثي الصادي هو التكرار المناظر لهذه الفئة ونصل هذه النقط بمستقيمات فنحصل على المضلع التكراري كما في الشكل الآتي الذي يمثل المضلع التكراري للمثال رقم (٢).

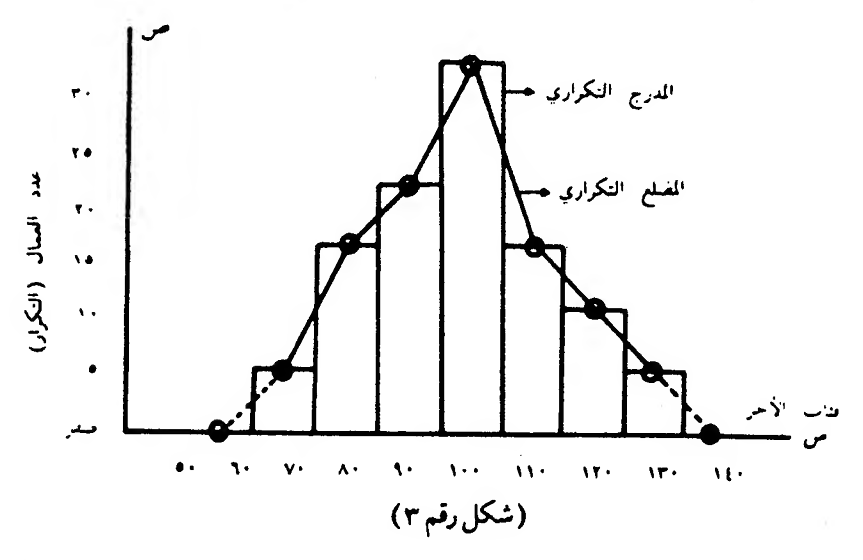


(شكل رقم ٢)

ويحسن إقفال المضلع التكراري مع المحور الأفقي وذلك بتصور أن هناك فئة سابقة للفئة الأولى وفئة لاحقة للفئة الأخيرة وتكرار كل منهما صفر ونصل مركز هاتين الفئتين بطرفي المضلع فيتم إقفاله .

ويمكن رسم المضلع التكرارى من المدرج التكراري ، وذلك بوضع نقط عند منتصف القواعد العليا لمستطيلات المدرج التكراري ثم نصل هذه النقط بمستقيمات فنحصل على المضلع التكراري و يتم إقفاله بالطريقة السابق شرحها كما يتضح من الشكل الآتي :

المدرج والمضلع التكراري لتوزيع الأجور اليومية
التي حصل عليها ١٠٠ عامل في أحد المصانع



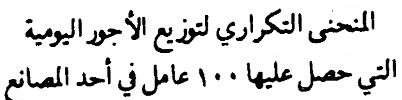
(شكل رقم ٣)

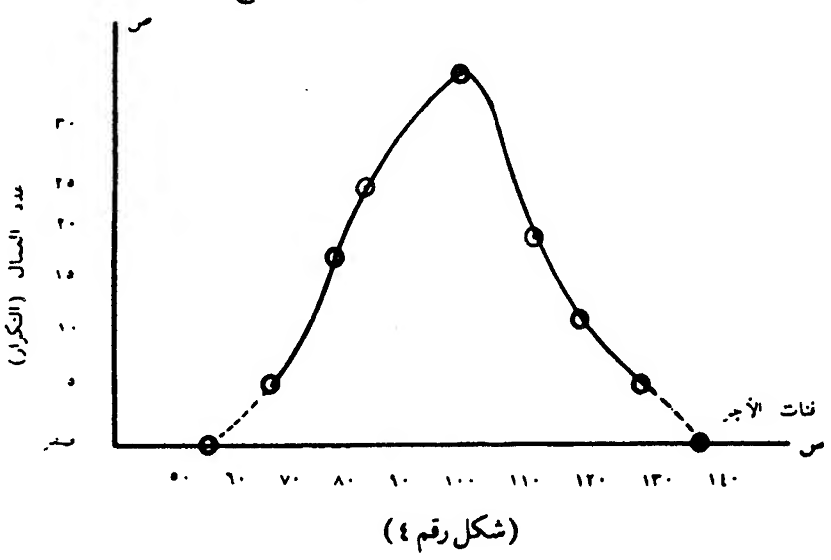
و يعتبر المضلع التكراري من أنسب طرق تمثيل التوزيعات التكرارية بيانياً ، خاصة في حالة مقارنة توزيعين تكراريين بيانياً على نفس المحاور.

(جـ) (المنحنى التكراري) :

يتم الحصول عليه بتقسيم المحورين الأفقي والرأسي وتعيين مواقع النقط كما في حالة المضلع التكراري تماماً ، ثم نرسم منحنى ممهداً يمر بأكبر عدد ممكن من هذه النقط ويمر بتوازن خلال باقي النقط ، و يتم إقفاله كما في حالة المضلع التكراري تماماً .

والشكل الآتي يوضح المنحنى التكراري للمثال رقم (٢) .





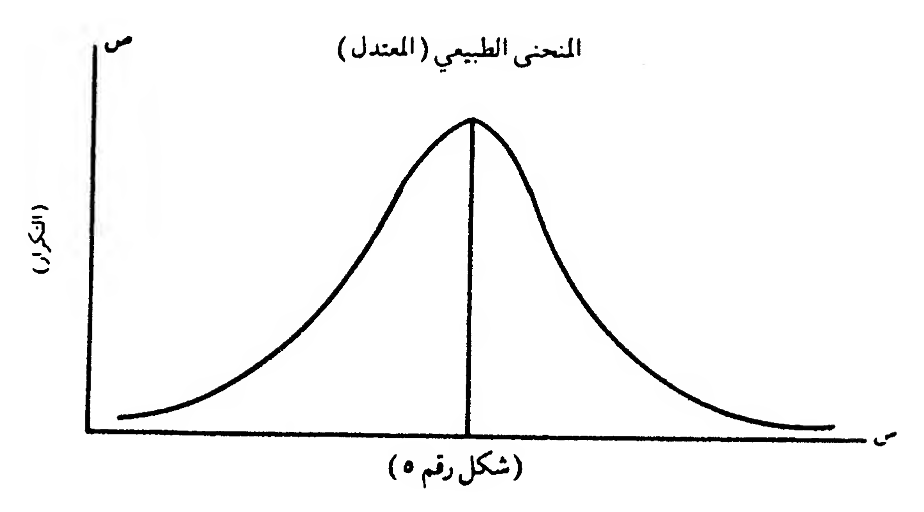
(شكل رقم ٤)

اشكال المنحنيات التكرارية

يجدر بنا ونحن في مجال دراسة المنحنى التكراري أن نستعرض بعض الأشكال التي يمكن أن يأخذها هذا المنحنى. فالمنحنيات التكرارية تأخذ أشكالا متعددة وفقا لنوع وطبيعة البيانات التي تمثلها، وفيما يلي عرض مبسط لأهم هذه الأشكال.

١ـ المنحنى الطبيعي (المعتدل):

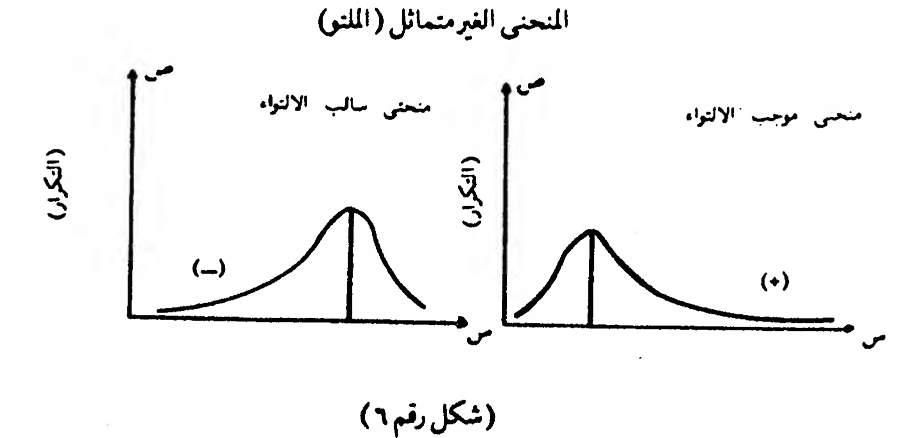
يعتبر من أهم المنحنيات التكرارية في الإحصاء و يشبه الناقوس من حيث الشكل ويمثل كثيراً من الظواهر التي تقابلنا في الحياة العملية مثل الأوزان والأطوال وهكذا. ومن خصائصه أنه متماثل حيث أن العمود الذي يمر بنهايته العظمى يقسمه إلى قسمين متساويين، كذلك تكون تكرارات كلا من القيم الصغيرة، والقيم الكبيرة قليلة، بينما تكرارات القيم المتوسطة تكون أكثر بالتدريج كما يتضح من الشكل الآتي:



(شكل رقم ٥)

٢ــ المنحنى الغير متماثل:

وهو منحنى ذو قمة واحدة ولكن فرعية غير متماثلين . فإذا كان لفرع الأيمن للمنحنى أطول من الأ يسر سمى المنحنى بموجب الإلتواء أو ملتو يأ جهة اليمين ، وفي هذه الحالة تكون تكرارات القيم الصغيرة كثيرة بينما تكرارات القيم الكبيرة قليلة . وعلى العكس إذا كان الفرع الأ يسر للمنحنى أطول من الأيمن سمى المنحنى بسالب الإلتواء أو ملتو يأ جهة اليسار، وفي هذه الحالة تكون تكرارات القيم الصغيرة قليلة بينما تكرارات القيم الكبيرة كثيرة ــ كما يتضح من الشكل الآتي:

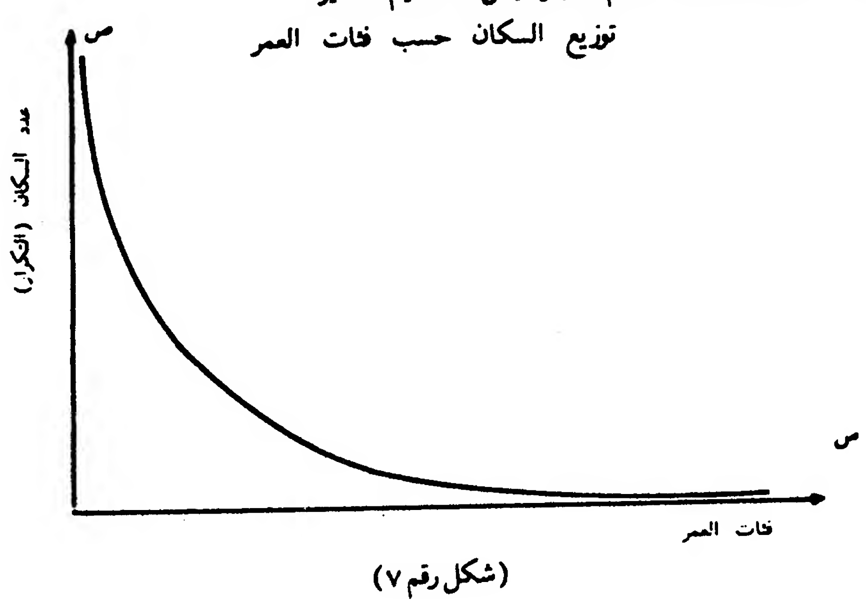


(شكل رقم ٦)

ومن أمثلة المنحنيات الملتوية ، المنحنيات التكرارية التي تمثل دخول الأفراد في بعض الدول التي نجد أن غالبية أفرادها إما فقراء أو أغنياء .

٣ـ المنحنى التكراري ذو الفرع الواحد:

و يسمى هذا المنحنى بالمنحنى الأسي، وهومنحنى ليس له قمة لأنه يتكون من فرع واحد وفيه تزداد التكرارات إما عند القيم الكبيرة وتقل عند القيم الصغيرة

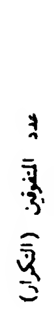


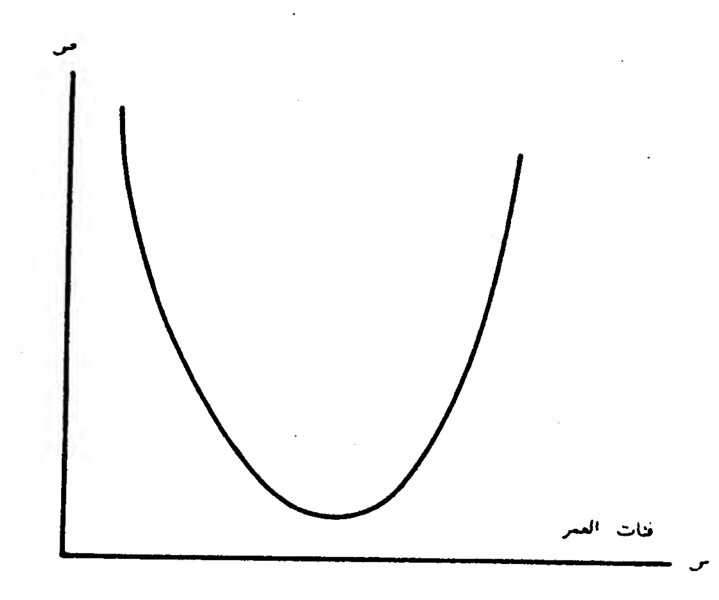
(شكل رقم ٧)

أو العكس تقل عند القيم الكبيرة وتزداد عند القيم الصغيرة.. ومثال ذلك المنحنى الذي يمثل توزيع السكان في بعض المجتمعات حسب فئات العمر، فنجد أن عدد السكان يكون كبيراً في فئات العمر الصغير، ثم يقل تدريجياً بتقدم العمر كما يتضح من الشكل (رقم ٧).

٤ـ المنحنى التكراري ذو النهاية الصغرى:

و يسمى بالمنحنى النوني، وهو يمثل ظاهرة تكون كل من القيم الصغيرة والكبيرة فيها أكثر شيوعاً وتكراراً من القيم المتوسطة. ومن الأمثلة على ذلك المنحنى الذي يمثل توزيع عدد المتوفين حسب فئات العمر، فمعظم المتوفين من الأعمار الصغيرة والكبيرة بعكس الأعمار المتوسطة كما يتضح من الشكل الآتي:





شكل رقم (٨)

توزيع المتوفين حسب فئات العمر

الجداول التكرارية المتجمعة وتمثيلها بيانيا

١ـ الجداول التكرارية المتجمعة:

أوضحنا فيما سبق أن الجدول التكراري يعطي معلومات تفصيلية عن توزيع المفردات على الفئات داخل الجدول فهو يعطينا عدد المفردات في كل فئة على حدة ولكننا في بعض الأحيان نحتاج إلى معرفة بيانات أخرى إجمالية، كأن نرغب في معرفة عدد المفردات التي تكون قيمتها أقل أو أكبر من قيمة معينة. ففي الجدول رقم (٤) قد يهمنا مثلا معرفة عدد العمال الذين يبلغ أجرهم اليومي أقل من ٩٠ ريالاً فنجد انهم ٤٠ عاملاً وهذا العدد هو مجموع التكرارات بالفئات الثلاث الأولى بالجدول التكراري، كذلك قد يهمنا معرفة عدد العمال الذين يبلغ أجرهم ١١٠ ريالاً فأكثر فنجد أنهم ١٥ عاملاً وهو مجموع التكرارين بالفئتين الأخيرتين من الجدول وهكذا.

ولتكملة هذه المعلومات وعرضها بشكل منظم نضعها في جدول يسمى «الجدول التكراري المتجمع» وفيه تجمع التكرارات على التوالي من أحد طرفي الجدول إلى طرفه الآخر فنحصل على التكرار الكلي (مجموع التكرارات). فإذا بدأنا بتجميع التكرارات من جهة الفئات الصغيرة إلى الكبيرة (أي من أعلى إلى أسفل الجدول) سمى التكرار «متجمعاً صاعداً» واذا بدأنا بتجميع التكرارات من جهة الفئات الكبيرة إلى الصغيرة (أي من أسفل إلى أعلى الجدول) سمى التكرار «متجمعاً نازلا». وفي حالة التوزيع التكراري المتجمع الصاعد تذكر الفئات بالصورة «أقل من الحد الأعلى للفئة» و يكون التكرار المقابل للفئة الأخيرة مساو ياً لمجموع التكرارات، أما في حالة التوزيع التكراري المتجمع النازل فتذكر الفئات بالصورة «الحد الأدنى للفئة فأكثر» و يكون التكرار المقابل للفئة الأولى مساو ياً لمجموع التكرارات.

والجدولان الآتيان [رقم (٥)،(٦)] يوضحان التوزيعين المتجمعين الصاعد والنازل للمثال رقم (٢).

جدول رقم (٥)
الجدول التكراري المتجمع الصاغد
للأجور اليومية لـ ١٠٠ عامل بأحد المصانع

أقل من الحد الأعلى للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٦٠	صفر
» ٧٠	٥
» ٨٠	٢٠
» ٩٠	٤٠
» ١٠٠	٧٠
» ١١٠	٨٥
» ١١٠	٩٥
» ١٢٠	١٠٠

جدول رقم (٦)
الجدول التكراري المتجمع النازل
للأجور اليومية لـ ١٠٠ عامل بأحد المصانع

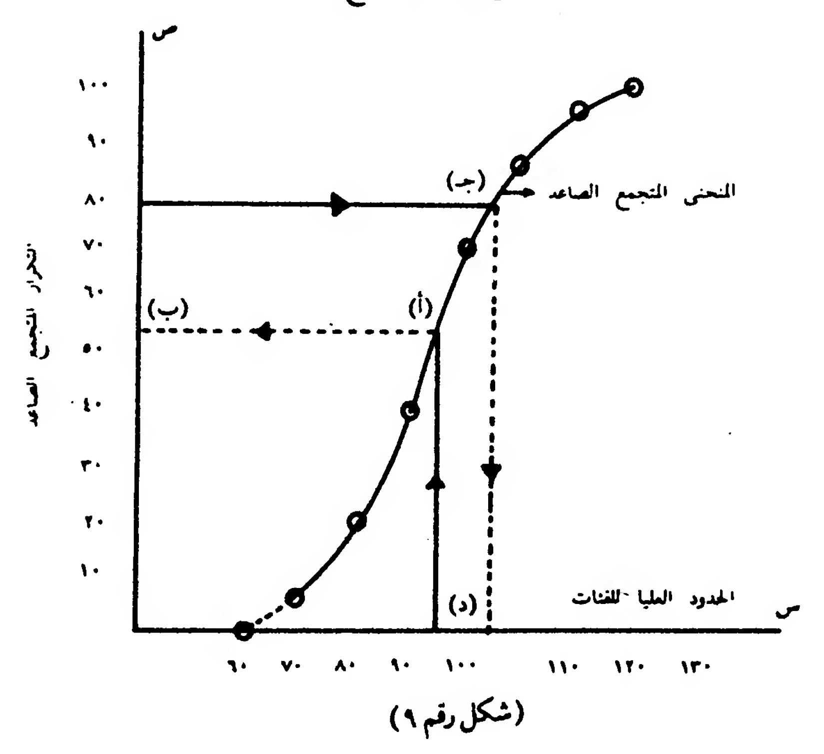
الحد الادنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٦٠ فأكثر	١٠٠
٧٠ »	٩٥
٨٠ »	٨٠
٩٠ »	٦٠
١٠٠ »	٣٠
١١٠ »	١٥
١٢٠ »	٥
١٣٠ »	صفر

٢ ـ تمثيل التوزيعات التكرارية المتجمعة بيانياً:

بينـا فيما سبق كيفية تكوين الجداول التكرارية الصاعدة والنازلة من الجدول التكراري البسيط ، ولعرض بيانات هذه الجداول التكرارية المتجمعة بيانياً نرسم محورين متعامدين كالمعتاد ونخصص المحور الأفقي للفئات والمحور الرأسي للتكرارات مع مراعاة أن يتسع المحور الرأسي للتكرار الكلي وليس لأكبر تكرار لأن أكبر عدد في عمود التكرار المتجمع يكون مساو ياً للتكرار الكلي للمفردات.

ولتمثيل بيانات الجدول التكراري المتجمع الصاعد: جدول رقم (٥) بيانيا، تخصص المحور الأفقي للحدود العليا للفئات والمحور الرأسي للتكرار المتجمع الصاعد، ثم نرصد النقط على الوسم كالمعتاد ونصل بينها بمنحنى ممهد فنحصل على المنحنى المتجمع الصاعد، و يسمى المنحنى صاعداً لأن التكرارات المتجمعة تكون في ازدياد مستمر. والشكل الآتي يبين المنحنى المتجمع الصاعد للجدول رقم (٥).

المنحنى المتجمع الصاعد للأجور اليومية
لـ ١٠٠ عامل من أحد المصانع



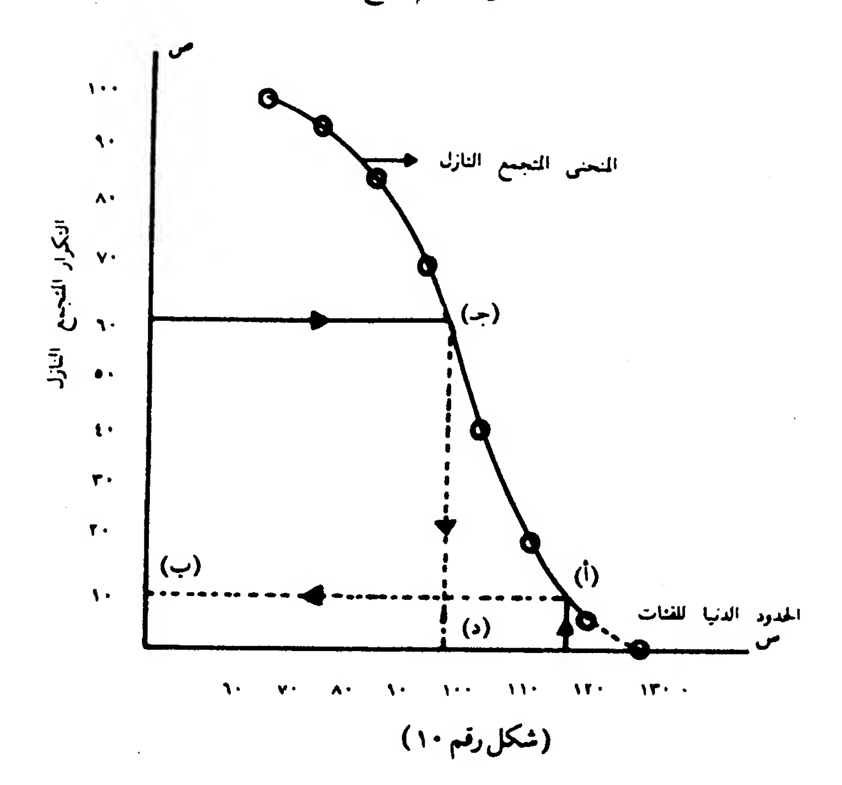
(شكل رقم ٩)

و يلاحظ أننا أخذنا فئة سابقة لأصغر فئة وتكرارها صفر لأقفال المنحنى مع المحور الأفقي.

ومن الرسم يمكن الحصول على بعض النتائج التي من أجلها يتم تكوين الجدول التكراري المتجمع، فمثلا لمعرفة عدد العمال الذين حصلوا على أجر أقل من ٩٥ ريالا، نقيم عموداً على المحور الأفقي عند النقطة ٩٥ يقابل المنحنى المتجمع الصاعد في النقطة (أ) نمد من عندها خطاً مستقيما يقابل المحور الرأسي في النقطة (ب) فتكون هي عدد العمال المطلوب. و بالعكس إذا أردنا معرفة الحد الأعلى للأجر الذي حصل عليه ٧٨ عاملاً، فإننا نأخذ مستقيما من عند النقطة ٧٨ على المحور الرأسي يقابل المنحنى في النقطة (جـ) نسقط من عندها عموداً يقابل المحور الأفقي في النقطة (د) تكون هي الحد الاعلى المطلوب للأجور.

ولتمثيل بيانات الجدول التكراري المتجمع النازل: جدول رقم (٦) بيانيا، نخصص المحور الأفقي للحدود الدنيا للفئات والمحور الرأسي للتكرار المتجمع النازل، ثم نرصد النقط على الرسم كالمعتاد ونصل بينها بمنحنى ممهد فنحصل على المنحنى المتجمع النازل، و يسمى المنحنى نازلا لأن التكرارات المتجمعة تكون في تناقص مستمر.

المنحنى المتجمع النازل للأجور اليومية
لـ ١٠٠ عامل بأحد المصانع



(شكل رقم ١٠)

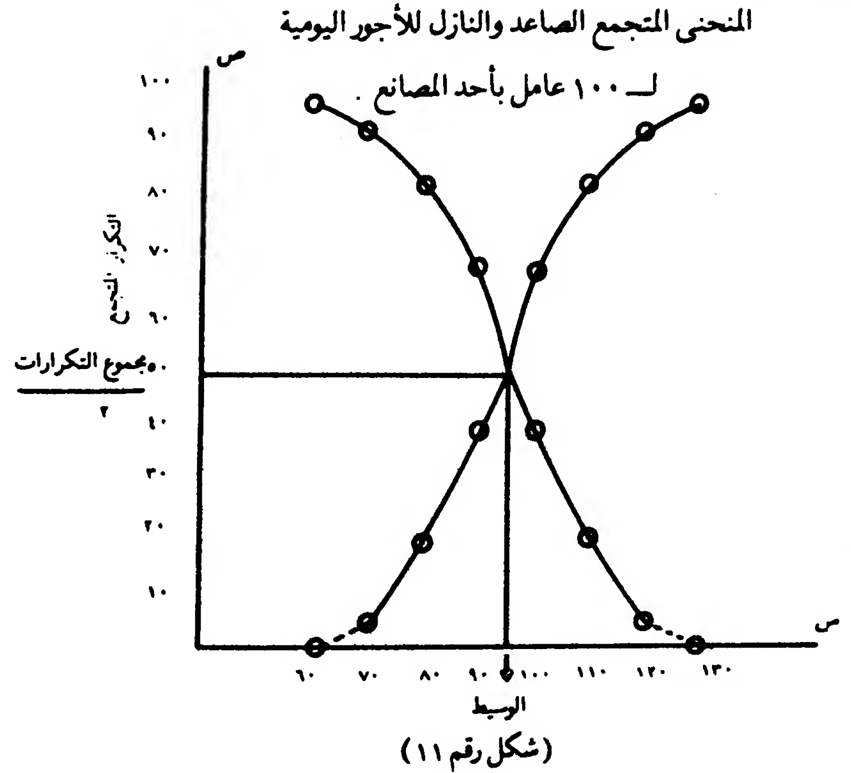
و يبين الشكل رقم (١٠) المنحنى المتجمع النازل للجدول رقم (٦) و يلاحظ أيضا أننا أخذنا حداً أدنى لفئة لاحقة لأكبر فئة وتكرارها صفر لاقفال المنحنى على المحور الأفقي .

ومن الرسم يمكن استنتاج بعض النتائج . فمثلا لمعرفة عدد العمال الذين حصلوا على أجر ١١٦ ريالا فأكثر، نقيم عمودا على المحور الأفقي من عند النقطة ١١٦ يقابل المنحنى من النقطة (أ) ثم من عندها خطاً مستقيما يقابل المحور الرأسي من النقطة (ب) فتكون هي عدد العمال المطلوب . وكذلك إذا أردنا معرفة الحد الأدنى للأجر الذي حصل عليه ٦٠ عاملاً فإننا نأخذ مستقيما من عند النقطة ٦٠ على المحور الرأسي حتى يقابل المنحنى من النقطة (جـ) نسقط من عندها عموداً يقابل المحور الأفقي من النقطة (د) فتكون هي الحد الأدنى المطلوب للأجور.

ويمكن رسم المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل معاً من شكل واحد وذلك بتخصيص المحور الأفقي لحدود الفئات ــ العليا والدنيا ــ والمحور الرأسي للتكرار المتجمع ــ الصاعد والنازل ــ ثم نرصد النقط الخاصة لكل منحنى على الرسم ونصل بينها بمنحنى ممهد كالمعتاد فنحصل على المنحنيين معاً في رسم واحد . ونلاحظ أن المنحنيين يتاقبلان معاً من نقطة أحداثيها الصادي يساوي نصف مجموع التكرارات وأحداثها السيني يعرف بالوسيط وهو أحد مقاييس المتوسط التي سنتعرض لها بالتفصيل فيما بعد .

المنحنى المتجمع الصاعد والنازل للأجور اليومية

لـ ١٠٠ عامل بأحد المصانع .



(شكل رقم ١١)

أمثلة عامة

مثال عام رقم (١)

البيانات الآتية توضح التقديرات التي حصل عليها أربعون طالبا في امتحان مادة الاحصاء :

جيد	جيد جدا	راسب	مقبول	جيد
راسب	مقبول	ممتاز	جيد	راسب
مقبول	جيد	مقبول	جيد جدا	مقبول
راسب	مقبول	راسب	مقبول	مقبول
مقبول	جيد جدا	مقبول	جيد	مقبول
ممتاز	مقبول	راسب	راسب	جيد
مقبول	راسب	جيد	مقبول	جيد جدا
راسب	جيد	ممتاز	جيد	راسب

والمطلوب وضع هذه التقديرات في جدول تكراري بسيط .

الحل

١ ــ بدراسة التقديرات الواردة في المثال نجد انها تنحصر في ٥ تقديرات هي « ممتاز ــ جيد جداً ــ جيد ــ مقبول ــ راسب » وهذه تكون التقديرات التي سيتم تلخيص البيانات التي لدينا على أساسها .

٢ ــ نكون الجدول التفريغي الآتي :

التقديرات	العلامات	عدد الطلبة (التكرار)
ممتاز	///	٣
جيد جداً	////	٤
جيد	~~////~~ ////	٩
مقبول	~~////~~ ~~////~~ ////	١٤
راسب	~~////~~ ~~////~~	١٠
الجملة	ــــ	٤٠

٣ــ نكون الجدول التكراري البسيط بأخذ العمودين الأول والثالث من الجدول التفريغي السابق فنحصل على الجدول الآتي:

توزيع الطلاب حسب التقديرات
التي حصلوا عليها في امتحان مادة الاحصاء

التقديرات	عدد الطلبة (التكرار)
ممتاز	٣
جيد جداً	٤
جيد	٩
مقبول	١٤
راسب	١٠
الجملة	٤٠

مثال عام رقم (٢)

البيانات الآتية تمثل الأجر اليومي بالريال لـ ١٠٠ عامل في إحدى المنشآت.

١٨	٤٤	٤٣	٤٤	٥٦	٣٢	٤٤	٣٨	٣٧	٥٠
٦٠	٢١	٣٧	٢٣	٤٠	٤٦	٢٦	٤٥	٣٣	٤٦
٢٤	٤٢	٣٨	٤٥	٥١	٢٩	٥٦	٤٩	٤٣	٥٢
٥٤	٦١	٤٩	٦٣	٦٤	٥٩	٤٧	٢٨	٣٨	٥٣
٣٠	٤٣	٤٢	٢٧	٢٨	٣٥	٣١	٥٧	٥١	٣٤
٣٦	٢٥	٤٤	٤٥	٥٨	٤١	٣٦	٣٢	٥٠	٣٩
٣٩	٥٥	٢٢	٥٧	٣٤	٣٩	٤٨	٤٣	٥٧	٤٥
٤٨	٤٣	٦٢	٤٦	٤٠	٥٣	٥٦	٣٧	٣٣	٥٣
٥٠	٣١	٤٤	٢٣	٥٢	٤٧	٣١	٥٨	٣٨	٥٨
٤٢	٤٤	٢٦	٤٩	٦٤	٤١	٣٨	٤٧	٣٧	٥٢

والمطلوب:

١ـ تكوين جدول التوزيع التكراري للعمال حسب فئات الأجر اليومي.

٢ـ تمثيل هذه البيانات باستخدام:

(أ) المدرج التكراري.

(ب) المضلع التكراري.

(جـ) المنحنى التكراري.

٣ـ رسم المنحنى المتجمع الصاعد للتوزيع ومنه أوجد:

(أ) عدد العمال الذين حصلوا على أقل من ٤٥ ريال.

(ب) الحد الأعلى للأجر الذي حصل عليه ٧٠ عامل.

٤ـ رسم المنحنى المتجمع النازل ومنه أوجد:

(أ) عدد العمال الذين حصلوا على ٣٣ ريالاً فأكثر، ثم أوجد نسبتهم إلى جملة العمال.

(ب) الحد الأدنى للأجر الذي حصل عليه ٥٠ عاملاً.

الحل

١ـ (أ) بإلقاء نظرة على هذه البيانات نجد أن أصغر قيمة هي (١٨) وأكبر قيمة هي (٦٤) وأن المدى لهذه البيانات هو ٦٤ـ ١٨ = ٤٦. وحيث أن عدد المفردات ١٠٠ مفردة فالوضع المناسب لطول الفئة أن يكون ستة و بذلك نحصل على ثمان فئات تتوزع عليها مفردات البحث. وتكون الفئة الأولى ١٨ ـ لتشمل أصغر قيمة وهي (١٨)، والفئة الأخيرة ٦٠ ـ لتشمل أكبر قيمة وهي (٦٤).

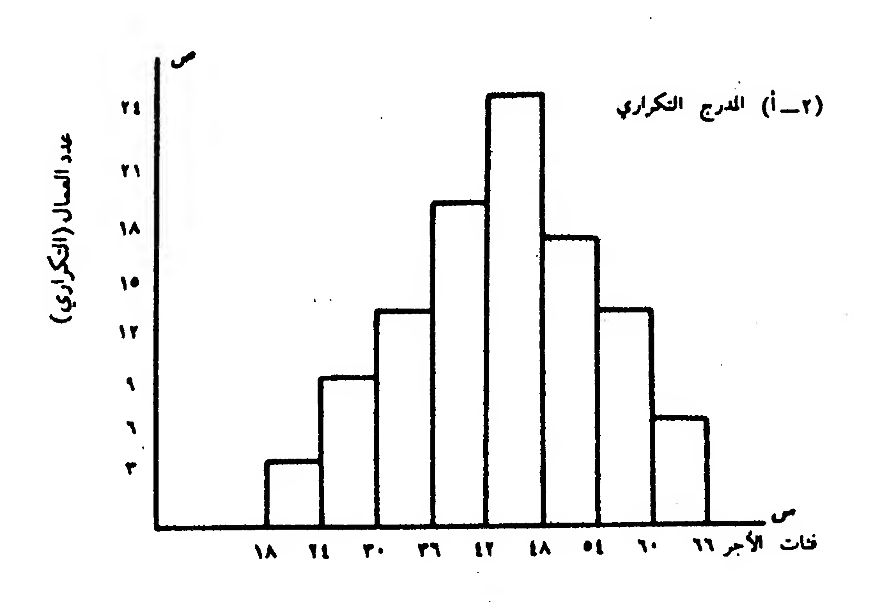
(ب) نكون الجدول التفريغي الآتي:

فئات الأجر	العلامات	عدد العمال
١٨ —	////	٤
٢٤ —	~~////~~ ///	٨
٣٠ —	~~////~~ ~~////~~ //	١٢
٣٦ —	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ///	١٨
٤٢ —	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ////	٢٤
٤٨ —	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ /	١٦
٥٤ —	~~////~~ ~~////~~ //	١٢
٦٠ — ٦٦	~~////~~ /	٦
الجملة	———	١٠٠

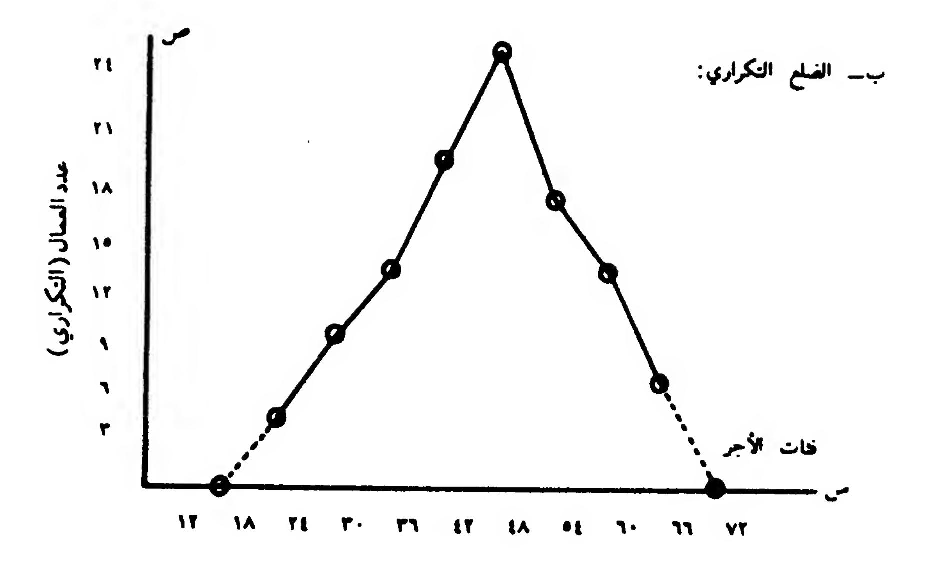
(جـ)بأخذ العمودين الأول والثالث من الجدول التفريغي السابق، نحصل على الجدول التكراري الآتي:

توزيع العمال حسب فئات
الأجر اليومي

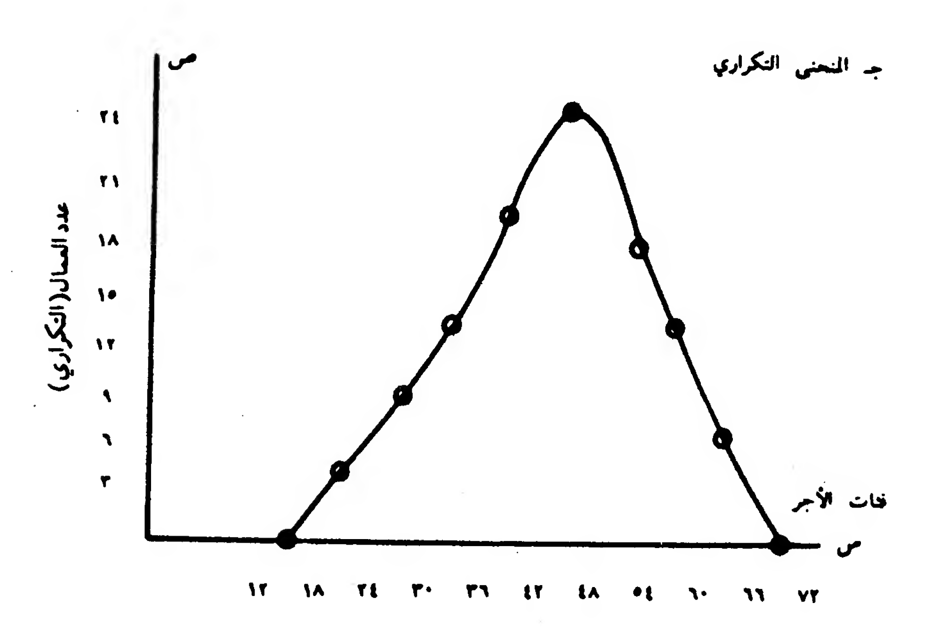
فئات الأجر	عدد العمال
١٨ —	٤
٢٤ —	٨
٣٠ —	١٢
٣٦ —	١٨
٤٢ —	٢٤
٤٨ —	١٦
٥٤ —	١٢
٦٠ — ٦٦	٦
الجملة	١٠٠



ب ــ المضلع التكراري:



جـ المنحنى التكراري



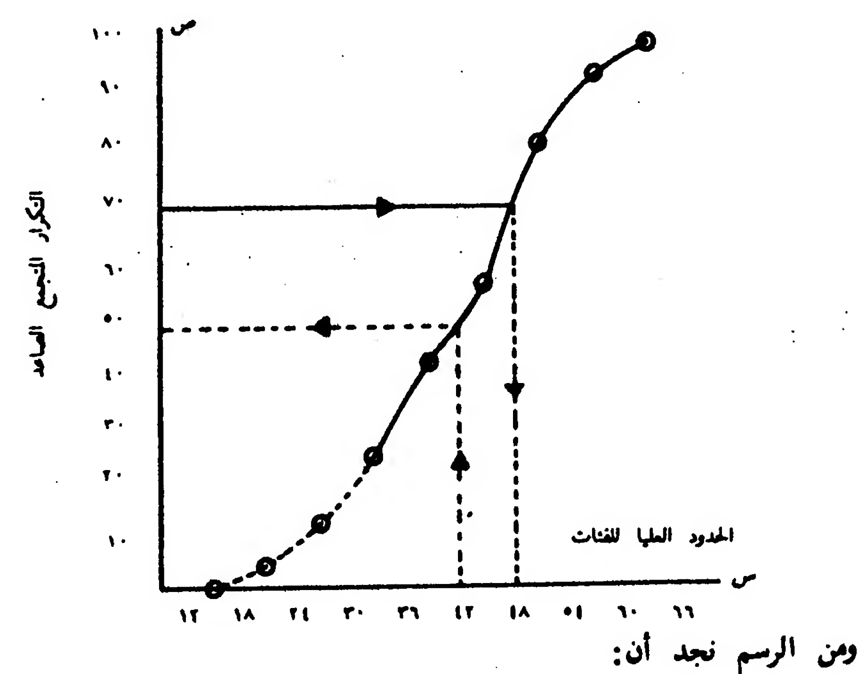
٣ ــ لرسم المنحنى المتجمع الصاعد لابد أولا من تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد كما يلي:

الجدول التكراري المتجمع الصاعد للأجر اليومي
الذي حصل عليه ١٠٠ عامل في إحدى المنشآت

أقل من الحد الأعلى للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٢٤	٤
» ٣٠	١٢
» ٣٦	٢٤
» ٤٢	٤٢
» ٤٨	٦٦
» ٥٤	٨٢
» ٦٠	٩٤
» ٦٦	١٠٠

ومن الجدول التكراري المتجمع الصاعد نرسم المنحنى المتجمع الصاعد كما يلي:

المنحنى المتجمع الصاعد
للأجر اليومي الذي حصل عليه ١٠٠ عامل في إحدى المنشآت



ومن الرسم نجد أن:

ـ عدد العمال الذين حصلوا على أجر أقل من ٤٥ ريالاً بلغ ٤٨ عاملا.

ـالحد الأعلى للأجر الذي حصل عليه ٧٠ عاملا وصل إلى ٥١ ريالاً.

٤ـ لرسم المنحنى المتجمع النازل لابد أولا من تكوين الجدول التكراري المتجمع النازل كما يلي:

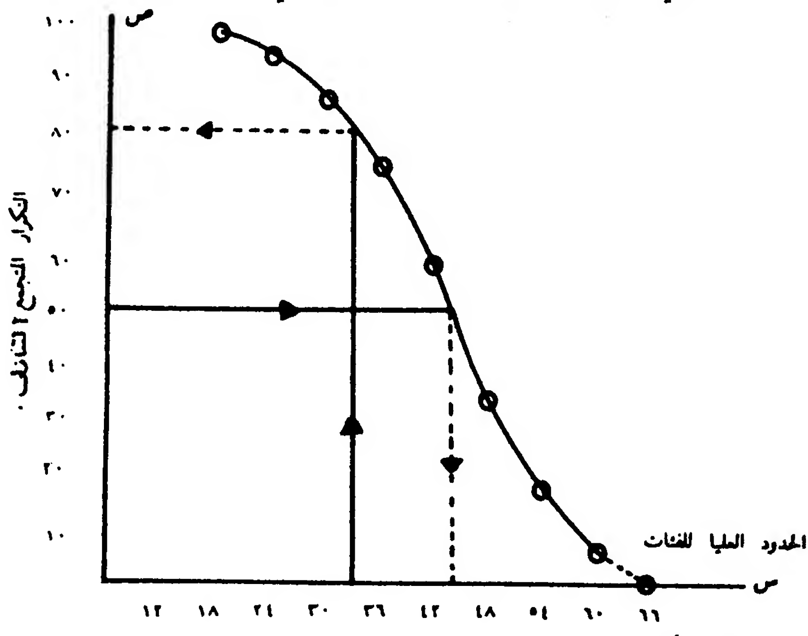
الجدول التكراري المتجمع النازل
للأجر اليومي الذي حصل عليه ١٠٠ عامل
في احدى المنشآت

الحد الادنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
١٨ فأكثر	١٠٠
٢٤ »	٩٦
٣٠ »	٨٨
٣٦ »	٧٦
٤٢ »	٥٨
٤٨ »	٣٤
٥٤ »	١٨
٦٠ »	٦

ومن الجدول التكراري المتجمع النازل نرسم المنحنى المتجمع النازل كما يلي:

المنحنى المتجمع النازل

للأجر اليومي الذي حصل عليه ١٠٠ عامل في إحدى المنشآت



ومن الرسم نجد أن:

ـ عدد العمال الذين حصلوا على ٣٣ ريالاً فأكثر بلغ ٨٢ عاملاً . ونسبتهم إلى جملة العمال

= ٨٢/١٠٠ × ١٠٠ = ٨٢ ٪ .

ـ الحد الأدنى للأجر الذي حصل عليه ٥٠ عاملا وصل إلى ٤٤ ريالاً .

تمارين

١ ـ أخذت عينة من ٣٠ شخصاً وتم جمع بيانات عن حالتهم العملية فكانت كما يلي :

مستخدم	صاحب عمل	يعمل لدى الاسرة	يعمل لحسابه	متعطل	صاحب عمل
صاحب عمل	يعمل لدى الاسرة	صاحب عمل	صاحب عمل	يعمل لدي الاسرة	مستخدم
متعطل	مستخدم	يعمل لحسابه	متعطل	صاحب عمل	يعمل لحسابه
صاحب عمل	يعمل لحسابه	يعمل لحسابه	صاحب عمل	يعمل لحسابه	متعطل
يعمل لدى الاسرة	صاحب عمل	يعمل لدى الاسرة	يعمل لدى الاسرة	يعمل لحسابه	صاحب عمل

والمطلوب وضع هذه البيانات في جدول تكراري بسيط وفقاً للحالة العملية .

٢ــ البيانات الآتية تمثل أوزان ٨٠ طالباً بإحدى الكليات بالكليو جرام.

٨٠	٧٥	٦٢	٦٩	٥١	٦١	٧٢	٨٣
٦١	٦٢	٦٤	٧٣	٧٣	٦٨	٨٦	٨٤
٥٥	٧٠	٧٩	٧٨	٦٦	٨٩	٦٣	٦٥
٧١	٧٦	٦٦	٧٣	٥٧	٦٥	٦٥	٧١
٧٦	٧٧	٧٨	٨٥	٦٨	٦٨	٦٦	٥٩
٦٦	٧٠	٧٢	٧٢	٨٢	٦٣	٦٨	٨٦
٦٩	٨٤	٧٤	٦٤	٦٣	٦٩	٦٧	٦٥
٧٤	٦٢	٧٠	٧٩	٧٢	٧١	٥٦	٦٧
٧٧	٧٦	٧٥	٧٤	٧٨	٥٧	٦٧	٦٠
٨٢	٦٧	٦٤	٦١	٦٠	٦٩	٥٧	٨١

والمطلوب :

١ــ تصنيف هذه البيانات في جدول تكراري بسيط طبقا لفئات الوزن.
٢ــ رسم المدرج والمضلع التكراري للتوزيع الذي حصلت عليه في بند (١).
٣ــ رسم المنحنى المتجمع الصاعد للتوزيع ومنه أوجد عدد الطلبة الذين يقل وزنهم عن ٦٢ كجم .
٤ــ رسم المنحنى المتجمع النازل للتوزيع ومنه أوجد عدد الطلبة الذين بلغ وزنهم ٧٣ كجم فأكثر، ثم أوجد نسبتهم إلى جملة الطلاب .

٣ــ الجدول الآتي يوضح توزيع درجات الحرارة في إحدى المدن في ١٢٠ يوماً .

درجات الحرارة	٨ -	١٢ -	١٦ -	٢٠ -	٢٤ -	٢٨ -	٣٢ -	٣٦ - ٤٠	الجملة
عدد الايام	٦	١٢	٢٠	٣٠	٢٤	١٦	٨	٤	١٢٠

والمطلوب :

١ــ رسم المدرج والمنحنى التكراري للتوزيع .
٢ــ رسم المنحنى المتجمع النازل ومنه أوجد :

(أ) عدد الأيام التي تقل فيها الحرارة عن ١٨ درجة مئوية .
(ب) عدد الأيام التي تزيد فيها الحرارة عن ٣٠ درجة مئوية .

٤ــ الجدول الآتي يوضح توزيع أطوال مجموعة من طلبة الجامعة .

الطول (بالسنتيمتر)	١٥٠-	١٥٥-	١٦٠-	١٦٥-	١٧٠-	١٧٥-	١٨٠-	١٨٥ - ١٩٠	الجملة
عدد الطلاب	٤	١٢	١٨	٢٤	٣٠	١٠	٨	٤	١١٠

والمطلوب :

١ــ رسم المضلع التكراري للتوزيع .

٢ــ رسم المنحنى المتجمع الصاعد للتوزيع ومنه أوجد :

(أ) عدد الطلبة الذين تقل أطوالهم عن ١٦٢ سم .

(ب) الحد الأعلى للطول الذي بلغه ٨٠ طالباً .

٥ــ الجدول الآتي يوضح توزيع المبيعات الشهرية بآلاف الريالات لعينة من المنشآت الكبيرة في احدى المدن .

فئات المبيعات	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠ - ١٠٠	الجملة
عدد المنشآت	٤	١١	٢٠	٣٦	١٧	٨	٤	١٠٠

والمطلوب :

أولا : تمثيل هذه البيانات باستخدام :

(أ) المدرج التكراري .

(ب) المضلع التكراري .

(جـ) المنحنى التكراري .

ثانياً : رسم المنحنى المتجمع الصاعد ومنه أوجد :

(أ) عدد المنشآت التي تقل فيها المبيعات عن ٦٥ الف ريال .

(ب) الحد الأعلى للمبيعات التي حققتها ٢٥ منشأة .

ثالثا : رسم المنحنى المتجمع النازل ومنه أوجد :

(أ) عدد المنشآت التي بلغت فيها المبيعات ٧٠ الف ريال فأكثر .

(ب) الحد الأدنى للمبيعات التي حققتها ٦٠ منشأة .

٦ــ الجدول الآتي يبين دخل ٨٠ أسرة بمدينة ما بمئات الريالات :

فئات الدخل	١٦-	٢٢-	٢٨-	٣٤-	٤٠-	٤٦-	٥٢ - ٥٨	الجملة
عدد الاسر	٤	١٠	١٦	٢٤	١٤	٨	٤	٨٠

والمطلوب إيجاد :

١ــ عدد الأسر التي تحصل على دخل أقل من ٥٠٠٠ ريال .
٢ــ الحد الأعلى للدخل الذي حصلت عليه ٢٠ أسرة .
ــ عدد الأسر التي بلغ دخلها ١٨٠٠ ريال فأكثر.
ــ الحد الأدنى للدخل الذي حصلت عليه ٥٥ أسرة .

٧ــ الجدول الآتي يوضح توزيع سكان بلد ما حسب فئات السن في إحدى التعدادات .

فئات السن	٠ ــ	٥ ــ	١٠ ــ	١٥ ــ	٢٠ ــ	٢٥ ــ	٣٠ ــ	٣٥ ــ	٤٠ ــ ٤٥
عدد السكان (بالمائة ألف)	٢٦	٢٤	٢٢	١٩	٢٩	٢٦	٢٢	١٢	١٠

والمطلوب:

(١) رسم المنحنى المتجمع الصاعد للتوزيع ومنه أوجد عدد السكان الذين يقل عمرهم عن ٢٢ سنة وكذلك نسبة السكان الذين يتراوح عمرهم بين ٦ ، ١٢ سنة .
(٢) أوجد باستخدام الرسم عدد السكان الذين يبلغ عمرهم ٢٨ سنة فأكثر.

الباب الثالث

مقاييس النزعة المركزية

«المتوسطات»



مقاييس النزعة المركزية
«المتوسطات»

١ ـ مقدمة:

درسنا في الباب السابق طرق جمع البيانات وتلخيصها في جداول تكرارية وكيفية عرضها بيانياً، وفي هذا الباب سنتعرض لخطوة هامة من خطوات البحث الإحصائي وهي إيجاد مقياس يمثل الظاهرة محل الدراسة و يستخدم للمقارنة بينها و بين الظواهر الأخرى.

فبالنظر إلى مفردات أي ظاهرة نلاحظ أن غالبية هذه المفردات تتراكم حول قيمة ما تسمى متوسط الظاهرة، ثم يتناقص عدد المفردات بالتدريج كلما بعدت عن هذه القيمة المتوسطة من الجانبين. وهذا التراكم عند نقطة أو قيمة متوسطة هو ما يطلق عليه «النزعة المركزية» أي ميل مفردات الظاهرة إلى القرب أو التجمع حول قيمة معينة هي القيمة المتوسطة. وهذا بالطبع لايحدث في جميع التوزيعات التكرارية ولكنه السلوك المعتاد لمعظم التوزيعات فمن الطبيعي ألا تنجح جميع المفردات في التقارب من القيمة المتوسطة، فبعض المفردات تفشل فشلا بسيطاً وتكون قريبة منها وعدد أقل يكون أكثر بعداً، وهكذا حتى نجد أن العدد الذي يختلف عن المتوسط اختلافا كبيراً (بالزيادة أو النقصان) يكاد يتلاشى. فمثلاً، الأفراد الذين نقابلهم في حياتنا اليومية مختلفون في أطوالهم ولكننا نجد أن معظمهم متوسطي الطول وعدداً قليلا منهم يختلف عن المتوسط زيادة ونقصاً ولكننا لانكاد نقابل الأقزام أو العمالقة إلا نادراً.

ولتحديد القيمة المتوسطة توجد عدة أسس. الأمر الذي ترتب عليه وجود مقاييس الموضع (النزعة المركزية) الآتية:

ـ الوسط الحسابي ـ الوسيط ـ المنوال
ـ الوسط الهندسي ـ الوسط التوافقي

ولايمكن تفضيل أحد هذه المقاييس على الآخر لأن لكل منها مزاياه وعيوبه، إلا أن هناك بعض التوزيعات يصلح فيها استخدام أحد هذه المقاييس أكثر من الأخرى. ولو ذكر لفظ المتوسط دون تحديد فيقصد به الوسط الحسابي.

وسندرس بالتفصيل المقاييس الثلاثة الأولى وهي الأكثر استعمالا، ونذكر إجمالا باقي المقاييس.

٢ ـ الوسط الحسابي:

(أ) تعريفه:

يعرف الوسط الحسابي بأنه «قيمة إذا أعطيت لكل مفردة من مفردات الظاهرة لكان مجموع القيم الجديدة مساو يا للمجموع الفعلي للقيم الأصلية للظاهرة» أي أن الوسط الحسابي يساوى مجموع القراءات مقسوماً على عددها.

(ب) طرق حسابه:

في حالة البيانات غير المبوبة:

يتم حساب الوسط الحسابي لمجموعة من القيم بقسمة مجموع هذه القيم على عددها.

$$\text{أى أن الوسط الحسابى} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$$

فمثلا: إذا كانت أوزان مجموعة من الطلبة بالكيلوجرام هي:

٥٠، ٦٠، ٨٠، ٧٠، ١٠٠ كيلوجرام على التوالي:

فإن الوسط الحسابي لأوزان الطلبة

$$= \frac{٥٠ + ٦٠ + ٨٠ + ٧٠ + ١٠٠}{٥} = \frac{٣٦٠}{٥} = ٧٢ \text{ كجم}$$

ويمكن التعبير عن ذلك بصيغة رياضية بسيطة يمكن استخدامها في جميع الحالات. فإذا كانت س ترمز للظاهرة محل الدراسة وكان لدينا عدد (ن) قراءة من قيم هذه الظاهرة ولتكن $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، . . . . . .، $س_ن$ فيكون الوسط الحسابي ($\bar{س}$) هو:

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad (١)$$

حيث: $\sum$ س تعبر عن مجموع قيم الظاهرة.

وفى مثالنا السابق نجد أن $س_١ = ٥٠$ ، $س_٢ = ٦٠$ ، $س_٣ = ٨٠$

، $س_٤ = ٧٠$ ، $س_٥ = ١٠٠$ وكذلك نجد أن عدد الطلبة (ن) = ٥

و باستخدام المعادلة رقم (١) في حساب الوسط الحسابي لأوزان الطلبة نجد أن:

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$$

$$= \frac{٥٠ + ٦٠ + ٨٠ + ٧٠ + ١٠٠}{٥}$$

$$= \frac{٣٦٠}{٥} = ٧٢ \text{ كجم}$$

ملحوظة:

هناك بعض الخواص لتسهيل العمليات الحسابية، ونظراً لانتشار استخدام الآلات الحاسبة فسنكتفي بذكرها.

الخاصية الأولى:

إذا طرحنا (أو جمعنا) من جميع القيم مقداراً ثابتاً (يسمى وسطاً فرضياً و يرمز له بالرمز أ) فإن الوسط الحسابي للقراءات الأصلية يساوى الوسط الفرضي مضافاً إليه الوسط الحسابي للقراءات الجديدة (الانحرافات عن الوسط الفرضي)

فإذا كانت القيم الأصلية (س) هى : $س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، \cdots ، س_ن$

، القيم الجديدة $[(س_١ - أ) ، (س_٢ - أ) \cdots \cdots ، (س_ن - أ)]$

ويرمز لها بـ (ح) هى: $ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، \cdots \cdots \cdots ، ح_ن$

فإن $\bar{س} = أ + \bar{ح}$ .. .. (٢)

حيث $\bar{ح} = \frac{\sum ح}{ن}$

، ح ترمز للانحرافات عن الوسط الفرضي (أ)

الخاصية الثانية:

إذا كانت القراءات الجديدة (الانحرافات عن الوسط الفرضي) ح تقبل القسمة على مقدار ثابت ف، فنحصل على قراءات مبسطة ولتكن ص. فيكون الوسط الحسابي للقراءات الأصلية يساوى الوسط الحسابي للقراءات المبسطة مضروباً في المقدار الثابت ومضافاً إليه الوسط الفرضي (أ).

فإذا كانت القيم الأصلية (س)هي: $س_١ ، س_٢ ، \cdots \cdots \cdots ، س_ن$

وكانت القيم الجديدة (الانحرافات عن الوسط الفرضي)(ح) هي:

$[(س_١ - أ) ، (س_٢ - أ) ، \cdots \cdots \cdots ، (س_ن - أ)]$

$ح_١ ، ح_٢ ، \cdots \cdots \cdots \cdots ، ح_ن$

وكانت القراءات المبسطة (ص) هي =

$$\left[\frac{ح_1}{ف} ، \frac{ح_2}{ف} ، \cdots \cdots \cdots ، \frac{ح_ن}{ف} \right]$$

$$ص_1 ، ص_2 ، \cdots \cdots \cdots \cdots ، ص_ن$$

$$\text{فإن } \bar{س} = أ + ف \bar{ص} \quad \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \quad (٣)$$

$$\text{حيث } \bar{ص} = \frac{\sum ص}{ن}$$

في حالة البيانات المبوبة (الجداول التكرارية):

ذكرنا في الباب الثاني أنه بعد توزيع القيم الأصلية للظاهرة على الفئات في الجدول التكراري، تختفي هذه القيم وتضيع معالمها وكل ما يمكن معرفته عن أي قيمة منها انها واحدة من مفردات فئة معينة في الجدول. وأوضحنا كذلك أن القاعدة في هذه الحالة هي اعتبار أن كل المفردات التي في فئة تكرارية واحدة متساوية وقيمتها تساوي مركز الفئة التي تناظرها.

فإذا كانت س ترمز لمراكز الفئات، ك هو التكرار المناظر لها فيكون الوسط الحسابي:

$$\bar{س} = \frac{\sum س ك}{\sum ك} \quad \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \quad (٤)$$

ولحساب الوسط الحسابي للأجور اليومية التي حصل عليها ١٠٠ عامل من أحد المصانع والمبين توزيعها في الجدول رقم (٤) ـ في الباب الثاني ـ نتبع الخطوات الآتية:

١ ـ نضيف عمودا لمراكز الفئات (س)

٢ ـ نضرب تكرار كل فئة في مركز هذه الفئة ونضع حاصل الضرب (س × ك) في العمود الأخير من الجدول.

وبذلك نحصل على الجدول الآتي:

جدول رقم (١)
ايجاد الوسط الحسابي للأجور اليومية
التي حصل عليها ١٠٠ عامل في أحد المصانع

فئات الأجور (بالريال)	عدد العمال (التكرار = ك)	مراكز الفئات (س)	س × ك
٦٠ —	٥	٦٥	٣٢٥
٧٠ —	١٥	٧٥	١١٢٥
٨٠ —	٢٠	٨٥	١٧٠٠
٩٠ —	٣٠	٩٥	٢٨٥٠
١٠٠ —	١٥	١٠٥	١٥٧٥
١١٠ —	١٠	١١٥	١١٥٠
١٢٠ — ١٣٠	٥	١٢٥	٦٢٥
المجموع	١٠٠	—	٩٣٥٠

٣ــ نوجد قيمة الوسط الحسابي باستخدام العلاقة رقم (٤)

$$\bar{س} = \frac{\sum س ك}{\sum ك}$$ (أي مجموع العمود الأخير على مجموع العمود الثاني)

$$= \frac{٩٣٥٠}{١٠٠}$$

$$= ٩٣٫٥ \text{ ريالا}$$

مزايا وعيوب الوسط الحساب:

(أ) المزايا:

١ــ السهولة في الحساب ولذلك فهو أكثر المتوسطات استخداما.

٢ــ تدخل جميع قيم المجموعة في حسابه.

(ب) العيوب:

١ــ لايمكن إيجاده بالرسم.

٢ــ يتأثر بالقيم الشاذة.

٣ـ الوسيط :

أـ تعريفه :

الوسيط لمجموعة من القيم، هوالقيمة التي تتوسط مجموعة القيم بعد ترتيبها تصاعديا أوتنازليا، أي أنه القيمة التي يكون عدد القيم الأصغر منها مساو ياً لعدد القيم الأكبر منها، و يرمز له بالرمز (μ) .

ب ـ طرق حسابه :

(أ) في حالة البيانات غيرالمبوبة

يتم ترتيب قيم المجموعة ترتيبا تصاعدياً أو تنازلياً ثم نأخذ القيمة التي تقع في الوسط تماماً إذا كان عدد القيم (ن) فرديا، أو الوسط الحسابي للقيمتين الوسطيتين إذا كان عدد القيم (ن) زوجيا فتكون هي قيمة وسيط المجموعة.

فمثلا: إذا كانت أوزان خمسة أشخاص بالكيلو جرام هي ٥٠، ٦٠، ٨٠، ٧٠، ١٠٠، وأردنا إيجاد قيمة الوسيط لها فإننا نرتبها تصاعديا هكذا ٥٠، ٦٠، ٧٠، ٨٠، ١٠٠ أو تنازلياً ١٠٠، ٨٠، ٧٠، ٦٠، ٥٠ فتكون القيمة التي ترتيبها الثالثة (وهي القيمة الوسطى) هي الوسيط أي ٧٠ كيلو جرام، حيث يوجد قراءتان أصغر منها وقراءتان أكبر منها.

وعلى العموم فالوسيط لمجموعة من القيم عددها (ن) ـ وكانت ن عدداً فردياً ـ

هي القيمة التي ترتيبها $\frac{ن + ١}{٢}$.

أما إذا كان عدد القيم زوجيا وليكن ستة مثلا، فإنه يوجد لدينا قيمتان وسطيان هما الثالثة والرابعة و يكون الوسيط في هذه الحالة هو متوسط هاتين القيمتين. فمثلا، إذا كانت أوزان ستة أشخاص بالكيلو جرام هي: ٥٠، ٦٠، ٨٠، ٧٠، ٤٠، ١٠٠ ـ فلحساب الوسيط لهذه المجموعة نرتبها تصاعديا هكذا: ٤٠، ٥٠، ٦٠، ٧٠، ٨٠، ١٠٠ أو تنازلياً ١٠٠، ٨٠، ٧٠، ٦٠، ٥٠، ٤٠ و يكون الوسيط هو المتوسط الحسابي للقيمتين الثالثة والرابعة.

فتكون قيمة الوسيط $= \frac{٦٠ + ٧٠}{٢} = ٦٥$ كيلو جرام.

وعموما فالوسيط لمجموعة من القيم عددها (ن) ـ وكانت ن عدداً زوجيا ـ

عبارة عن $\frac{1}{2}$ [القيمة التى ترتيبها $\frac{ن}{٢}$ + القيمة التى ترتيبها $\frac{ن}{٢} + ١$] .

(ب) في حالة البيانات المبوبة (التوزيعات التكرارية):

يتم حساب الوسيط في حالة البيانات المبوبة بالحساب و بالرسم. وفيما يلي شرح لكل من الطريقتين:

١ــ بالحساب:

نتبع الخطوات الآتية

(أ) نكون من الجدول التكراري البسيط جدولا تكراريا متجمعا صاعدا (كما سبق بيانه في الباب الثاني).

(ب) نعين ترتيب الوسيط وهو $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{٢} = \frac{\sum ك}{٢}$ (سواء كان هذا المجموع فرديا أو زوجيا).

(جـ) نعين الفئة الوسيطية للتوزيع وهي تلك الفئة التي يقع فيها الوسيط (أي التي يقع فيها القراءة ذات الترتيب $\frac{\sum ك}{٢}$).

(د) تتحدد قيمة الوسيط داخل الفئة الوسيطية باستخدام العلاقة الآتية:

الوسيط = الحد الأدنى لفئة الوسيط + س ...... (٥)

حيث: س = طول فئة الوسيط ×

$$\frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمع الصاعد قبل فئة الوسيط}}{\text{تكرار الفئة الوسيطية}}$$

و بتطبيق الخطوات السابقة على الجدول رقم (٤) ــ الباب الثاني ــ نجد أن:

(أ) جدول رقم (٢)

الجدول التكراري المتجمع الصاعد

للأجور اليومية التي حصل عليها ١٠٠ عامل في أحد المصانع

فئات الأجور (بالريال)	عدد العمال (التكرار = ك)	أقل من الحد الأعلى للفئة	التكرار المتجمع الصاعد
٦٠ —	٥	أقل من ٧٠	٥
٧٠ —	١٥	« ٨٠	٢٠
٨٠ —	٢٠	« ٩٠	٤٠
٩٠ —	٣٠	« ١٠٠	٧٠ ← الفئة الوسيطية
١٠٠ —	١٥	« ١١٠	٨٥
١١٠ —	١٠	« ١٢٠	٩٥
١٢٠ — ١٣٠	٥	« ١٣٠	١٠٠
المجموع	١٠٠		

(ب) ترتيب الوسيط ($م_٢$) = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{٢} = \frac{\text{مج ك}}{٢}$

$= \frac{١٠٠}{٢}$

$= ٥٠$

ومنه نجد أن الفئة الوسيطية هي الفئة (٩٠ــ)

(جـ) قيمة الوسيط $= ٩٠ + ١٠ \times \frac{٥٠ - ٤٠}{٣٠}$

$= ٩٠ + \frac{١٠٠}{٣٠}$

$= ٩٠ + ٣,٣$

$=$ ٩٣,٣ ريال

٢ ـ بالرسم :

يتم إيجاد قيمة الوسيط بالرسم من المنحنى المتجمع الصاعد (أو النازل) باتباع الخطوات الآتية :

(أ) نكون جدولا تكراريا متجمعا صاعدا (أو نازل) (كما في حالة الحساب تماماً) .

(ب) نرسم المنحنى المتجمع الصاعد (أو النازل) (كما سبق شرحه في الباب الثاني)

(جـ) نعين ترتيب الوسيط (وهو يساوى مجموع التكرارات ÷ ٢) على المحور الرأسي .

(د) نحدد قيمة الوسيط بأن نرسم مستقيما أفقيا من عند نقطة ترتيب الوسيط يوازي المحور الأفقي و يقطع المنحنى المتجمع الصاعد أو النازل في نقطة (أ) ، نسقط منها عمودا على المحور الأفقي فيقابله في النقطة (ب) تكون هي قيمة الوسيط . وذلك لأن عدد القيم الأكبر من قيمة (ب) يساوى عدد القيم الأصغر منها .

وكلما كان الرسم دقيقا كلما حصلنا على قيمة الوسيط بدقة كبيرة .

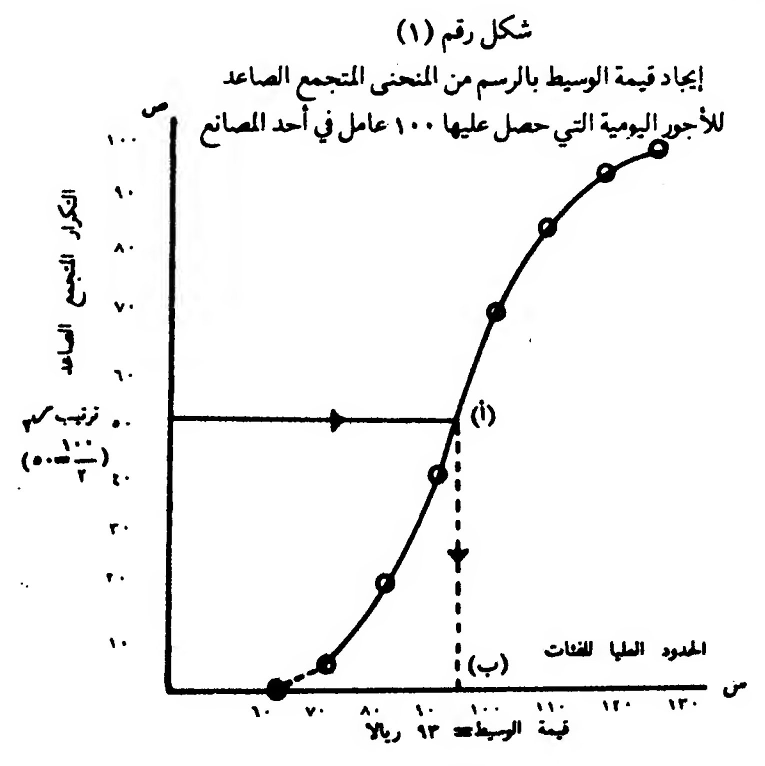
ويمكن كذلك إيجاد قيمة الوسيط وذلك برسم المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل معاً في رسم واحد ، حيث أن الأحداثي الرأسي لنقطة التقاطع يقع عند منتصف مجموع التكرارات (أي ترتيب الوسيط) و بذلك يكون الأحداثي الأفقي هو قيمة الوسيط .

والأشكال الثلاثة الآتية توضح طريقة إيجاد الوسيط للمثال رقم (٢) ـ الباب الثاني ـ من المنحنى المتجمع الصاعد والنازل كل على حدة ، ثم من المنحنيين المتجمعين معاً في رسم واحد .

شكل رقم (١)

إيجاد قيمة الوسيط بالرسم من المنحنى المتجمع الصاعد

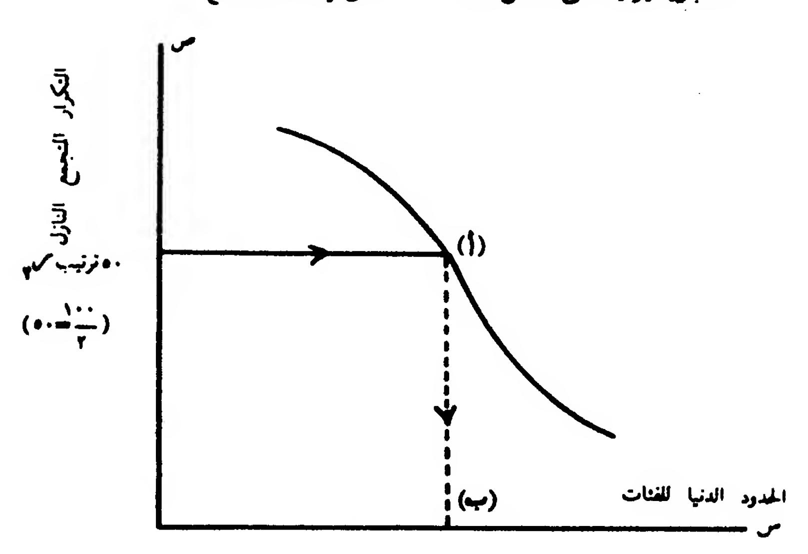
للأجور اليومية التي حصل عليها ١٠٠ عامل في أحد المصانع



شكل رقم (٢)

إيجاد قيمة الوسيط بالرسم من المنحنى المتجمع النازل

للأجور اليومية التى حصل عليها ١٠٠ عامل في أحد المصانع

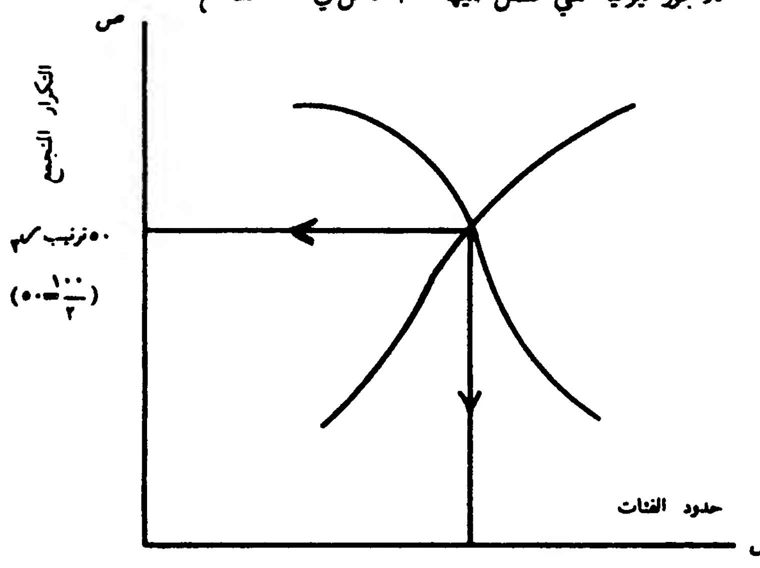


قيمة الوسيط = ٩٣ ريالا

شكل رقم (٣)

إيجاد قيمة الوسيط بالرسم من المنحنيين الصاعد والنازل معا

للأجور اليومية التي حصل عليها ١٠٠ عامل في أحد المصانع



قيمة الوسيط = ٩٣ ريالا

مزايا وعيوب الوسيط :

أ ــ المزايا :

١ ــ يمكن الحصول عليه بالرسم .

٢ ــ لايتأثر بالقيم الشاذة .

ب ــ العيوب :

لايدخل في حسابه سوى قراءة واحدة أو قراءتين من المجموعة كلها .

٤ ــ المنوال :

(أ) تعريفه :

المنوال لمجموعة من القيم هو القيمة الأكثر شيوعاً أي القيمة التي تكررت أكثر من غيرها .

فمثلا : إذا كان لدينا القيم الآتية : ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٥ ، ٨ ، ٥ ، ٦ فإن المنوال لهذه المجموعة هو القيمة (٥) لأنها تتكرر أكثر من غيرها .

أما في حالة البيانات المبوبة ، فالمنوال هو القيمة التي تناظر قمة المنحنى الذي يمثل التوزيع وذلك لأنها القيمة الأكثر تكراراً .

و يرمز للمنوال مالرمز (ل) .

(ب) طرق حسابه :

حساب المنوال في حالة البيانات غير المبوبة لا يمثل أي مشكلة حيث يتم حسابه من واقع التعريف مباشرة . أما في حالة البيانات المبوبة فإن حسابه يتطلب توفيق أحسن منحنى يمثل التوزيع الذي لدينا ومنه نوجد القيمة التي تناظر قمته فتكون هي قيمة المنوال . وتوفيق أحسن منحنى يتطلب ضرورة إيجاد معادلة هذا المنحنى حتى نستطيع الحصول على قيمة المنوال بدقة وهذا ليس مجالنا في هذه الدراسة ، إلا أنه يمكن إيجاد قيمة المنوال بالحساب أو بالرسم بطرق تقريبية .كما يلي :

١ ــ بالحساب :

طريقة الرافعة :

وتقوم هذه الطريقة على أساس أن المنوال طالما هو القيمة الأكثر تكرارا فهو يقع في الفئة ذات الأكبر تكرارا ، وهذه الفئة تعرف باسم « الفئة المنوالية » .

ولتحديد موقع المنوال داخل هذه الفئة المنوالية نفترض مبدئيا أنه يقع في مركز هذه الفئة ، ولكن

هذا يعتبر تقريباً لايكون صحيحاً إلا إذا كان التوزيع متماثلا تماماً ، أما إذا لم يكن التوزيع متماثلا وهو الغالب فإن المنوال ينحرف عن مركز الفئة نحو بدايتها أو نهايتها قليلا أو كثيراً حسب شدة الاختلاف بين قيمتي التكرارين في الفئتين السابقة واللاحقة للفئة المنوالية ــ فإذا كان تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالية أكبر من تكرار الفئة اللاحقة لها فإن المنوال يميل نحو بداية الفئة المنوالية والعكس صحيح . وعلى ذلك يستقر المنوال داخل الفئة المنوالية عند النقطة (س) التي تقسمها بنسبة التكرارين السابق واللاحق لها و بذلك يمكن إيجاد قيمة المنوال من العلاقة الآتية :

قيمة المنوال = بداية الفئة المنوالية + س .... (٦)

حيث س تحسب من العلاقة الآتية :

التكرار السابق للفئة المنوالية × س = التكرار اللاحق للفئة المنوالية × (طول الفئة المنوالية ــ س) . (٧)

و يؤخذ على هذه الطريقة عدم دقتها لأنها تهمل أكبر تكرار في التوزيع وهوتكرار الفئة المنوالية .

طريقة الفروق (طريقة بيرسون) :

وتقوم هذه الطريقة على أساس تلافي العيب الموجود في طريقة الرافعة وهو إهمال تكرار الفئة المنوالية عند حساب قيمة المنوال . فهذه الطريقة تعتمد على تكرارات الفئة المنوالية والفئتين المحيطتين بها وذلك بأخذ الفرق بين تكراري الفئة المنوالية والسابقة لها وكذلك الفرق بين تكراري الفئة المنوالية واللاحقة لها كعاملين مؤثرين في تحديد وضع المنوال داخل الفئة المنوالية وذلك بدلا من التكرار السابق واللاحق للفئة المنوالية فقط كما في طريقة الرافعة ، و بذلك يمكن إيجاد قيمة المنوال من العلاقة الآتية :

قيمة المنوال = بداية الفئة المنوالية + س .... (٨)

حيث س تحسب من العلاقة الآتية :

$$\frac{\text{س}}{\text{طول الفئة المنوالية ــ س}} = \frac{\text{تكرار الفئة المنوالية ــ التكرار السابق لها}}{\text{تكرار الفئة المنوالية ــ التكرار اللاحق لها}} \quad .... (٩)$$

ولاشك أن هذه الطريقة أدق من طريقة الرافعة لأنها تأخذ في اعتبارها تكرار الفئة المنوالية ذاتها علاوة على تكرار الفئتين المحيطتين بها .

و بالرجوع إلى المثال رقم (٢) فى الباب الثاني ، نجد أن الفئة المنوالية (ذات أكبر تكرار) هي

الفئة (٩٠ــ) وتكرارها ٣٠، والفئة السابقة لها هي الفئة (٨٠ــ) وتكرارها ٢٠ والفئة اللاحقة لها هي الفئة (١٠٠ــ) وتكرارها ١٥، فلحساب قيمة المنوال لهذا المثال باستخدام طريقتي الرافعة والفروق تحصل على النتائج الآتية:

ــحساب المنوال بطريقة الرافعة:

قيمة المنوال = بداية الفئة المنوالية + س

= ٩٠ + س

حيث س تحسب من العلاقة:

التكرار السابق للفئة المنوالية × س = التكرار اللاحق للفئة المنوالية × (طول الفئة المنوالية ــس).

٢٠ × س = ١٥ × (١٠ــ س)

٢٠ × س = ١٥٠ ــ ١٥ س

٣٥ س = ١٥٠

س = ١٥٠ / ٣٥

= ٤٫٣

وتكون قيمة المنوال = ٩٠ + ٤٫٣

= ٩٤٫٣ ريال

ــحساب المنوال بطريقة الفروق:

قيمة المنوال = بداية الفئة المنوالية + س

= ٩٠ + س

حيث س تحسب من العلاقة:

س / (طول الفئة المنوالية ــ س) = (تكرار الفئة المنوالية ــ التكرار السابق لها) / (تكرار الفئة المنوالية ــ التكرار اللاحق لها)

س / (١٠ ــ س) = (٣٠ ــ ٢٠) / (٣٠ ــ ١٥)

س / (١٠ ــ س) = ١٠ / ١٥

∴ ١٥ س = ١٠(١٠ ــ س)

١٥ س = ١٠٠ ــ ١٠ س

٢٥ س = ١٠٠

ومنها س = ١٠٠ / ٢٥

= ٤

وتكون قيمة المنوال = ٩٠+٤

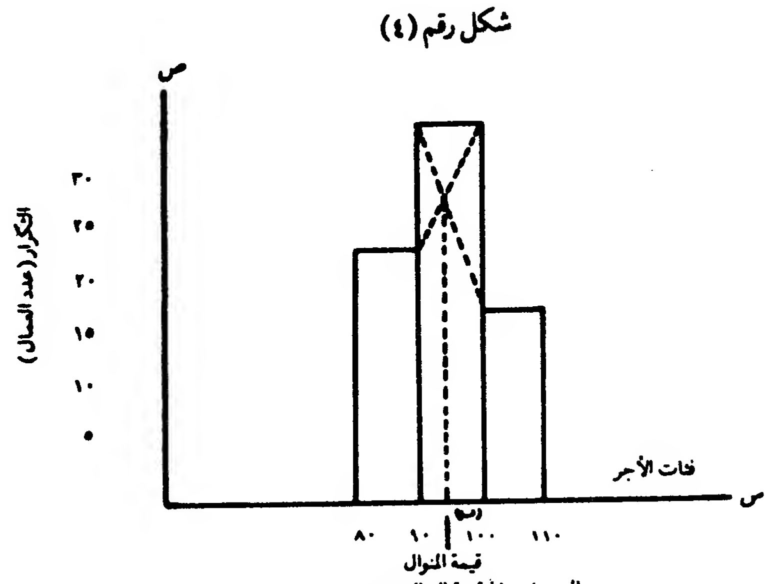
= ٩٤ ريال

وليس غريبا أن نحصل على نتيجتين مختلفتين لقيمة المنوال باستخدام الطريقتين فهذا هو الوضع الطبيعي إذ أن هاتين الطريقتين تقومان على أساسين مختلفين. والواقع أن كليهما تقريبي وان كانت احداهما وهي طريقة الفروق أقرب إلى الدقة من الأخرى وهي طريقة الرافعة.

ــ بالرسم:

يتم حساب قيمة المنوال بالرسم من المدرج التكراري، وان كان يكتفى برسم المستطيلات التي تمثل الفئة المنوالية والفئة السابقة واللاحقة لها، ثم نصل الرأس الأيمن العلوي لمستطيل الفئة المنوالية بالرأس الأيمن العلوي للمستطيل السابق له (الذي يمثل الفئة السابقة للفئة المنوالية) وكذلك نصل الرأس الأيسر العلوي لمستطيل الفئة المنوالية بالرأس الأيسر العلوي للمستطيل اللاحق له (الذي يمثل الفئة اللاحقة للفئة المنوالية) فيتقاطعان في نقطة نسقط من عندها عموداً على المحور الأفقي يقابله في نقطة تكون هي قيمة المنوال، كما يتضح من الشكل رقم (٤) الذي يوضح كيفية إيجاد قيمة المنوال بالرسم من المدرج التكراري للمثال رقم (٢) بالباب الثاني.

شكل رقم (٤)



مزايا وعيوب المنوال:

(أ) المزايا:

١ ـ سهل الحساب سواء بالرسم أو بالحساب

٢ ـ لايتأثر بالقيم الشاذة

(ب) العيوب:

١ ـ غير دقيق حيث يتم حسابه بطرق كلها تقريبية.

٢ ـ لايمكن حسابه في حالة التوزيعات التكرارية ذات المنحنيات بفرع واحد (شكل رقم ٧) أو بفرعين (شكل رقم ٨) في الباب الثاني.

٥ ـ الوسط الهندسي:

الوسط الهندسي لمجموعة من القيم عددها (ن)، هو الجذر النوني لحاصل ضرب هذه القيم، فإذا فرضنا أن $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ...، $س_ن$

هي قيم الظاهرة س، فإن الوسط الهندسي ـ و يرمز له بالرمز (هـ) ـ لهذا القيم يكون:

$$هـ = \sqrt[ن]{س_١ \times س_٢ \times س_٣ \cdots \times س_ن} \quad \ldots \ldots (١٠)$$

ولتسهيل العمليات الحسابية الخاصة بإيجاد قيمة الوسط الهندسي، نأخذ لوغاريتم الطرفين، أي أن:

$$لو\ هـ = \frac{1}{ن} (لو\ س_1 + لو\ س_2 + لو\ س_3 + ... + لو\ س_ن)$$

$$= \frac{\sum لو\ س}{ن}$$

أي أن لوغاريتم الوسط الهندسي لمجموعة من القيم يساوى الوسط الحسابي للوغاريتمات هذه القيم.

٦ـ الوسط التوافقي:

الوسط التوافقي لمجموعة من القيم عددها (ن) هو مقلوب الوسط الحسابي لمقلوبات هذه القيم.

فإذا فرضنا أن $س_1$، $س_2$، $س_3$، ...، $س_ن$ هي قيم الظاهرة (س) فإن الوسط التوافقي ــ و يرمز له بالرمز (ق) ــ لهذه القيم يكون:

$$ق = \frac{ن}{\sum (\frac{1}{س})} \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad (١١)$$

ولحساب الوسط التوافقي نتبع الخطوات الآتية:

١ ـ نوجد مقلوبات القيم $(\frac{1}{س})$ ثم نجمعها فنحصل على $\sum (\frac{1}{س})$

٢ ـ نقسم عدد القيم (ن) على المجموع السابق فنحصل على الوسط التوافقي (ق).

مثال عام

الجدول الآتي يوضح توزيع عينة من الأسر في إحدى البلاد حسب فئات الإنفاق الشهري بمئات الريالات.

فئات الإنفاق الشهرى	٥ ـ	٢٥ ـ	٤٥ ـ	٦٥ ـ	٨٥ ـ	١٠٥ ـ	١٢٥ ـ	١٤٥ ـ
عدد الأسر	٤	٦	١٥	٢٢	١٣	٧	٥	٣

والمطلوب:

١ ـ حساب قيمة الوسط الحسابي لإنفاق هذه الأسر.

٢ ـ حساب قيمة الوسيط.

(أ) بالحساب من الجدول التكراري المتجمع الصاعد .

(ب) بالرسم من المنحنى المتجمع الصاعد والنازل كل على حدة ثم من المنحنيين معاً في رسم واحد .

٣ـ حساب قيمة المنوال:

(أ) بالحساب بطريقتي الرافعة والفروق.

(ب) بالرسم من المدرج التكراري.

الحل

١ـ حساب قيمة الوسط الحسابي:

فئات الإنفاق الشهري (ف)	عدد الأسر (التكرار = ك)	مراكز الفئات (س)	مراكز الفئات × التكرار (س×ك)
٥ —	٤	١٥	٦٠
٢٥ —	٦	٣٥	٢١٠
٤٥ —	١٥	٥٥	٨٢٥
٦٥ —	٢٢	٧٥	١٦٥٠
٨٥ —	١٣	٩٥	١٢٣٥
١٠٥ —	٧	١١٥	٨٠٥
١٢٥ —	٥	١٣٥	٦٧٥
١٤٥ —	٣	١٥٥	٤٦٥
المجموع	٧٥	—	٥٩٢٥

الوسط الحسابي $\bar{س} = \frac{\sum س ك}{\sum ك}$

$= \frac{٥٩٢٥}{٧٥}$

= ٧٩ مئات الريالات

٢ـ حساب قيمة الوسيط:

(أ) بالحساب:

١ـ نكون الجدول التكراري المتجمع الصاعد كما يلي:

الجدول التكراري المتجمع الصاعد
لفئات الانفاق الشهري لعينة من الأسر
في إحدى البلاد

فئات الإنفاق	عدد الأسر	أقل من الحد الأعلى للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	
		أقل من ٥	صفر	
٥ ــ	٤	أقل من ٢٥	٤	
٢٥ــ	٦	أقل من ٤٥	١٠	
٤٥ــ	١٥	أقل من ٦٥	٢٥	
٦٥ــ	٢٢	أقل من ٨٥	٤٧	← الفئة الوسيطية
٨٥ــ	١٣	أقل من ١٠٥	٦٠	
١٠٥ــ	٧	أقل من ١٢٥	٦٧	
١٢٥ــ	٥	أقل من ١٤٥	٧٢	
١٤٥ــ	٣	أقل من ١٦٥	٧٥	
المجموع	٧٥			

$$\text{٢ ـ ترتيب الوسيط } (ر_٢) = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{٢} = \frac{\text{مجـ ك}}{٢}$$

$$= \frac{٧٥}{٢}$$

$$= ٣٧,٥$$

ومنه نجد أن الفئة الوسيطية هى الفئة (٦٥ –)

٣ـ قيمة الوسيط (م٢) = ٦٥ + ٢٠ × (٣٧,٥ – ٢٥) / ٢٢

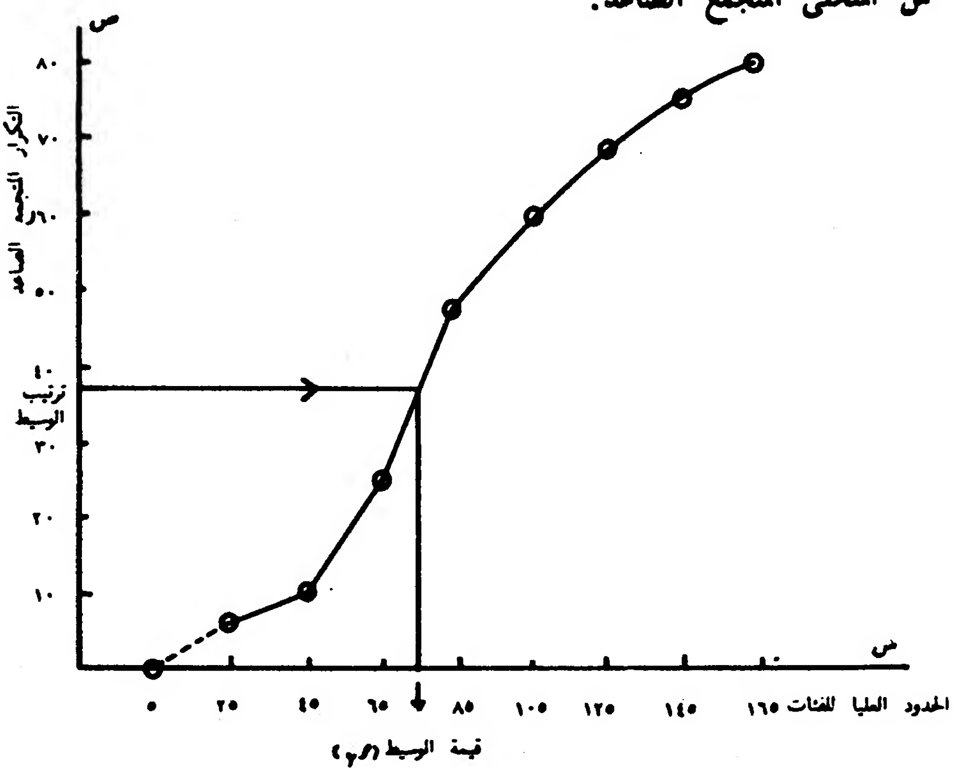
= ٦٥ + ٢٠ × ١٢,٥ / ٢٢

= ٦٥ + ١١,٣٦

= ٧٦,٣٦ مئات الريالات

(ب) بالرسم:

من المنحنى المتجمع الصاعد:



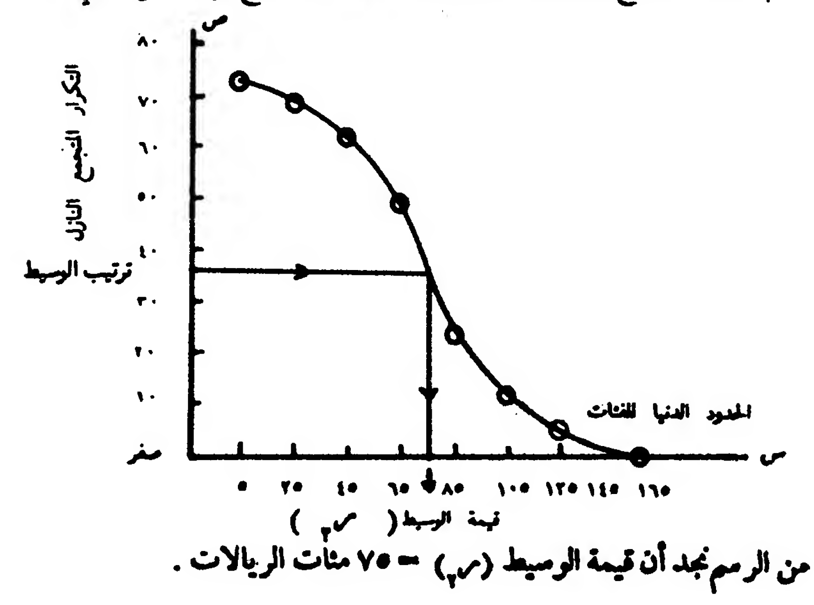
من الرسم نجد أن قيمة الوسيط (م٢) = ٧٥ مئات الريالات

من المنحنى المتجمع النازل:

نكون أولا الجدول المتجمع النازل كما يلي:

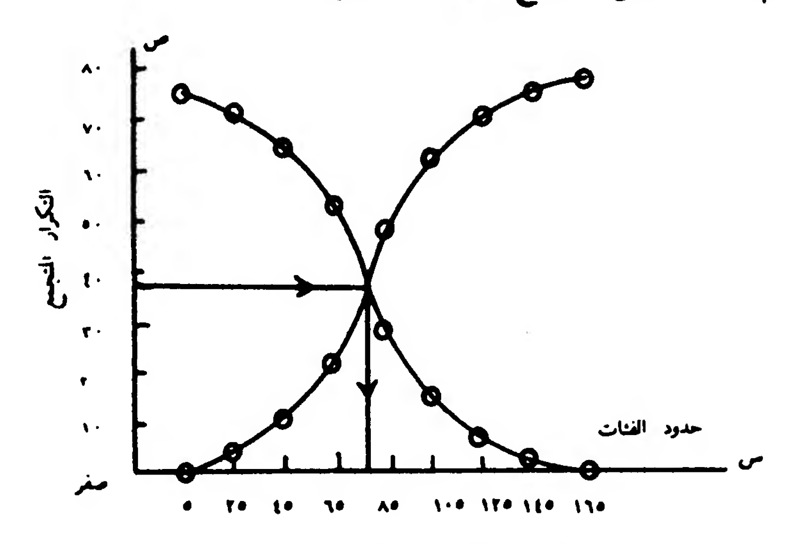
فئات الإنفاق	عدد الأسر	الحد الأدنى للفئة فأكثر	التكرار المتجمع النازل
٥ —	٤	٥ فأكثر	٧٥
٢٥ —	٦	٢٥ فأكثر	٧١
٤٥ —	١٥	٤٥ فأكثر	٦٥
٦٥ —	٢٢	٦٥ فأكثر	٥٠
٨٥ —	١٣	٨٥ فأكثر	٢٨
١٠٥—	٧	١٠٥ فأكثر	١٥
١٢٥—	٥	١٢٥ فأكثر	٨
١٤٥—	٣	١٤٥ فأكثر	٣
المجموع	٧٥	١٦٥ فأكثر	صفر

نرسم المنحنى المتجمع النازل ومنه نوجد قيمة الوسيط كما يتضح من الشكل الآتي:



من الرسم نجد أن قيمة الوسيط ($م_2$) = ٧٥ مئات الريالات .

بالرسم من المنحنى المتجمع الصاعد والنازل معاً



من الرسم نجد أن قيمة الوسيط ($م_٢$) = ٧٥ مئات الريالات .

٣– حساب قيمة المنوال:

(أ) بالحساب باستخدام طريقة الرافعة:

قيمة المنوال = بداية الفئة المنوالية + س

= ٦٥ + س

حيث س يتم حسابها كما يلي:

التكرار السابق للفئة المنوالية× س = التكرار اللاحق للفئة المنوالية× (طول الفئة المنوالية – س)

١٥× س = ١٣× (٢٠ – س)

١٥ س = ٢٦٠ – ١٣س

٢٨ س = ٢٦٠

∴ س = $\frac{٢٦٠}{٢٨}$

= ٩,٣

∴ قيمة المنوال = ٦٥ + ٩,٣

= ٧٤,٣ مئات الريالات .

(ب) بالحساب باستخدام طريقة الفروق (بيرسون):

قيمة المنوال = بداية الفئة المنوالية + س

= ٦٥ + س

حيث س يتم حسابها كما يلي:

$$\frac{\text{س}}{\text{طول الفئة المنوالية} - \text{س}} = \frac{\text{تكرار الفئة المنوالية} - \text{التكرار السابق لها}}{\text{تكرار الفئة المنوالية} - \text{التكرار اللاحق لها}}$$

$$\frac{\text{س}}{٢٠ - \text{س}} = \frac{٢٢ - ١٥}{٢٢ - ١٣}$$

$$\frac{\text{س}}{٢٠ - \text{س}} = \frac{٧}{٩}$$

$$\therefore ٩\ \text{س} = ٧\ (٢٠ - \text{س})$$

$$٩\ \text{س} = ١٤٠ - ٧\ \text{س}$$

$$١٦\ \text{س} = ١٤٠$$

$$\text{س} = \frac{١٤٠}{١٦} = ٨,٧٥$$

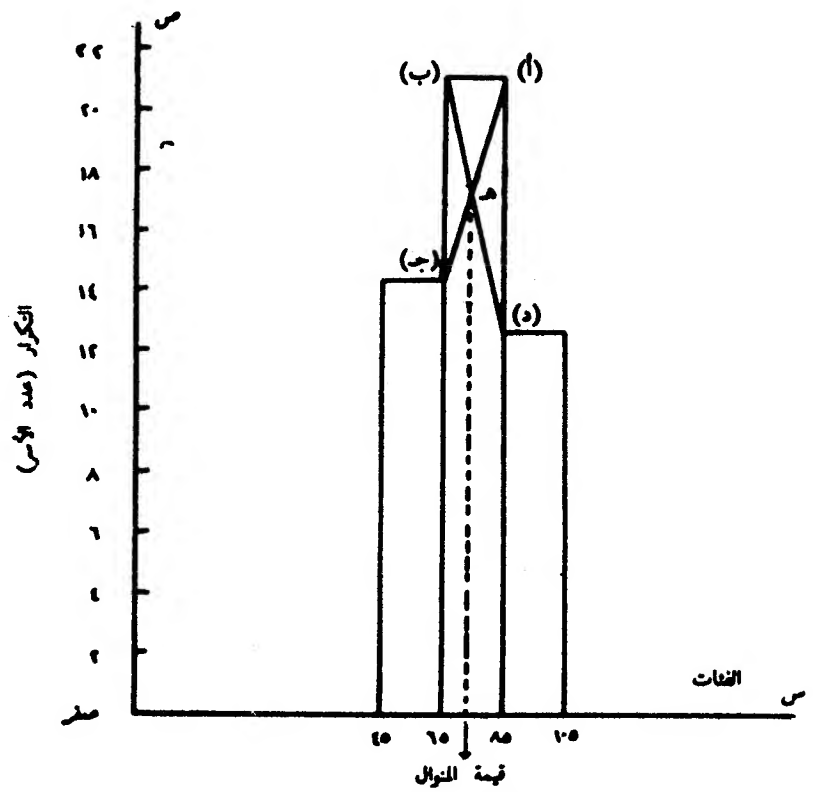
$$\therefore \text{قيمة المنوال} = ٦٥ + ٨,٧٥$$

= ٧٣,٧٥ مئات الريالات

و يلاحظ أننا حصلنا على قيمتين مختلفتين للمنوال من الطريقتين، وهذا أمر طبيعي نظراً لأن الطريقتين تقومان على أساسين مختلفين.

(جـ) بالرسم من المدرج التكراري:

يتم حساب قيمة المنوال بالرسم من المدرج التكراري و يكتفي برسم المستطيلات التي تمثل الفئة المنوالية والفئة السابقة واللاحقة لها كما يتضح من الشكل الآتي:



ومن الرسم السابق نجد أن قيمة المنوال=٧٤ مئات الريالات. و يلاحظ أن قيمة المنوال يجب ألا تتعدى الفئة المنوالية وهي (٦٥ــ) في مثالنا هذا.

تمارين

(١) الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لدرجة الحرارة في إحدى المدن خلال ١٠٠ يوم.

فئات درجات الحرارة	٢٠ ــ	٢٢ــ	٢٤ ــ	٢٦ ــ	٢٨ ــ	٣٠ ــ ٣٢
عدد الأيام	١٢	١٦	٣٤	٢٠	١٤	٤

والمطلوب:

١ــ حساب الوسط الحسابي لدرجة الحرارة.

٢ــ حساب قيمة الوسيط:

(أ) بالحساب من الجدول التكراري المتجمع الصاعد.

(ب) بالرسم من المنحنى المتجمع الصاعد والنازل كل على حدة، ثم من المنحنيين معاً في رسم واحد.

٣ـ حساب قيمة المنوال :
(أ) بالحساب بطريقتي الرافعة والفروق .
(ب) بالرسم من المدرج التكراري .

(٢) فيما يلي التوزيع التكراري لسكان إحدى البلاد حسب أعمارهم :

فئات السن بالسنة	١٠ –	١٥ –	٢٠ –	٢٥ –	٣٠ –	٣٥ –	٤٠ –	٤٥ –	٥٠ –
عدد السكان	٢٠	٢٤	٢٢	١٩	٢٩	٢٦	٢٠	١٢	٨

والمطلوب :

١ـ حساب قيمة الوسط الحسابي للأعمار.
٢ـ حساب قيمة الوسيط بالحساب والرسم .
٣ـ حساب قيمة المنوال بالحساب والرسم .

(٣) البيانات الآتية تبين توزيع عدد من المحلات التجارية حسب جملة المبيعات السنوية بآلاف الريالات .

جملة المبيعات	٥ –	١٠ –	١٥ –	٢٠ –	٢٥ –	٣٠ –	٣٥ –	٤٠ –
عدد المحلات	٢٠	٢٥	٣٦	٤٤	٣٠	٢٥	١٥	٥

والمطلوب:

١ـ حساب الوسط الحسابي لجملة المبيعات.
٢ـ استنتاج رقم المبيعات الشائع من هذه البيانات.
٣ـ رسم المنحنى المتجمع الصاعد ومنه أوجد:
(أ) قيمة وسيط التوزيع.
(ب) عدد المحلات التي تقل مبيعاتها عن ٢٧ ألف ريال، ثم احسب نسبتها إلى جلة المحلات.
٤ـ إيجاد عدد المحلات التي تبلغ مبيعاتها ١٨ الف ريال فأكثر.

(٤) الجدول الآتي يوضح توزيع عينة من الأسر في إحدى البلاد حسب فئات الانفاق الشهري بمئات الريالات :

فئات الانفاق الشهري	٢٥–	٤٥–	٦٥–	٨٥–	١٠٥–	١٢٥–	١٤٥–	١٦٥–
عدد الأسر	٤	٦	١٥	٢٢	١٣	٧	٥	٣

والمطلوب:

١ـــ حساب قيمة الوسط الحسابي لا نفاق هذه الأسر .

٢ـــ حساب قيمة الوسيط (أ) بالحساب (ب) بالرسم.

٣ـــ حساب قيمة المنوال(أ) بالحساب (ب) بالرسم.

الباب الرابع

مقاييس التشتت



مقاييس التشتت

مقدمة:

تكلمنا في الباب السابق عن أحد خصائص التوزيعات التكرارية وهي النزعة المركزية، و بينا أن مفردات أي ظاهرة تحاول أن تتمركز حول قيمة معينة من قيم هذه الظاهرة والتي أطلقنا عليها متوسط الظاهرة ودرسنا طرق حساب هذا المتوسط. وهذه الخاصية وحدها لا تكفي لوصف أي ظاهرة حيث أنها لا تعطي فكرة وافية عن مفردات هذه الظاهرة إذ لا تبين طبيعة الظاهرة ولا كيفية توزيع مفرداتها. وعلى ذلك لايمكننا المقارنة بين ظاهرتين بناء على متوسطيهما فقط إذ قد يكونان متساويان في قيمة المتوسط بينما تكون مفردات إحدى الظاهرتين متقاربة بعضها من بعض ومفردات الظاهرة الأخرى متشتتة أي متباعدة عن بعضها.

فمثلا، لو فرضنا أن لدينا الدرجات الآتية لمجموعة من الطلاب في مادتي المحاسبة والرياضيات:

درجات المحاسبة	:	٦٩	٧٠	٧١	٦٤	٧٦
درجات الرياضيات	:	٧٠	٤٠	٨٠	١٠٠	٦٠

فبإيجاد الوسط الحسابي لكل من هاتين المجموعتين نجد أنه يساوى (٧٠) درجة في الحالتين، إذا ما اكتفينا بمقارنة الوسطين الحسابيين للظاهرتين فإننا نستنتج أن مستوى الطلاب واحد في المادتين وهذا يخالف الواقع حيث أن درجات المحاسبة متقاربة من بعضها وتتركز حول وسطها بينما درجات الرياضيات متباعدة ومبعثرة في مدى كبير يساوى خمسة أمثال مدى درجات المحاسبة. وعلى ذلك فلا يمكننا اقتصار المقارنة بين الظواهر على متوسطاتها فقط، بل يجب البحث عن مقياس آخر يبين مدى تقارب أو تباعد مفردات الظواهر بعضها عن بعض، أي يجب أن نضيف إلى مقاييس المتوسط مقاييس أخرى تظهر درجة تقارب أو تشتت القيم بعضها عن بعض. وهذا التشتت يكون صغيراً إذا كان الاختلاف بين قيم المفردات قليلا و يكون كبيراً إذا كان الاختلاف بينها كبيراً أي إذا كانت الفروق بين قيم المجموعة كبيرة. وعلى ذلك يمكننا اتخاذ مقدار تشتت القيم مقياساً لمعرفة قرب القيم أو تباعدها من بعضها البعض. والتشتت يعتبر أحد خصائص التوزيعات التكرارية، و يقاس بأحد المقاييس الآتية:

(١) المدى.
(٢) نصف المدى الربيعي.

(٣) الانحراف المعياري.
(٤) الانحراف المتوسط.

وهذه المقاييس تختلف فيما بينها من حيث درجة الدقة وطريقة الحساب. وسنركز على المقاييس الشائعة الاستخدام.

١ ــ المدى:

هو أبسط مقاييس التشتت و يعرف بأنه الفرق بين أكبر وأصغر قراءة في المجموعة، وعلى ذلك فإذا كان المدى صغيراً تكون المجموعة متقاربة أي متجانسة وعلى العكس إذا كان المدى كبيراً فإنه يدل على أن مفردات المجموعة مبعثرة ومتشتتة ومتباعدة عن بعضها. ففي المثال السابق نجد أن المدى لدرجات مادة المحاسبة يساوى ٧٦ ــ ٦٤ = ١٢ درجة بينما المدى لمادة الرياضيات في نفس المثال يساوى ١٠٠ ــ ٤٠ = ٦٠ درجة، ومن هنا يتضح أن درجات المحاسبة أقل تشتتاً من درجات الرياضيات.

ولحساب المدى في حالة الجداول التكرارية نوجد الفرق بين الحد الأعلى للفئة الأخيرة والحد الأدنى للفئة الأولى، فمثلا التوزيع التكراري الوارد في الجدول رقم (٤) يكون المدى مساوياً ١٣٠ ــ ٦٠ = ٧٠ ريالا.

ويمتاز المدى كمقياس للتشتت بسهولته و يعاب عليه أنه لايدخل في حسابه إلا قراءتين فقط من المجموعة هما أكبر وأصغر قراءة بغض النظر عن تجانس أو تشتت القراءات الواقعة بينهما وعلى ذلك فهو شديد التأثر بالقراءات المتطرفة.

٢ ــ نصف المدى الربيعي (الانحراف الربيعي):

يمكن التخلص من العيب الذي يشوب المدى وهو تأثره بالقراءات المتطرفة وذلك بأن نستبعد الربع الأول من القراءات والربع الأخير منها ونحسب المدى للقراءات الباقية، بمعنى أن نوجد الربيع الأدنى ($ر_1$) والربيع الأعلى ($ر_3$) حيث أن:

ــ الربيع الأدنى ($ر_1$): هو القيمة التي تقسم مجموعة القراءات (بعد ترتيبها تصاعدياً) إلى قسمين بحيث يقع ربع القراءات قبلها.

ــ البيع الأعلى ($ر_3$): هو القيمة التي تقسم مجموعة القراءات (بعد ترتيبها تصاعدياً) إلى قسمين بحيث يقع ثلاثة أرباع القراءات قبلها.

وقد جرى العرف على استخدام نصف المسافة بين الربيعين كمقياس للتشتت و يسمى هذا المقياس بنصف المدى الربيعي أو الانحراف الربيعي و يساوى:

$$\frac{ر_3 - ر_1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

وطريقة حساب الربيع الأدنى ($ر_1$) والربيع الأعلى ($ر_3$) سواء بالحساب أو بالرسم هي نفسها طريقة حساب الوسيط ($ر_2$) والتي سبق شرحها في الباب السابق – مع مراعاة أن ترتيب الربيع الأدنى هو: $\frac{\sum ك}{4}$

وترتيب الربيع الأعلى هو: $\frac{\sum ك}{4} \times 3$

فمثلا: طريقة إيجاد قيمة الربيع الأدنى ($ر_1$) بالحساب تتلخص في الخطوات الآتية:

١ – نكون من الجدول التكراري البسيط جدولا تكراريا متجمعا صاعدا (كما سبق بيانه في الباب الثاني).

٢ – نعين ترتيب الربيع الأدنى و يساوى $\frac{\sum ك}{4}$

٣ – نعين فئة الربيع الأدنى للتوزيع، وهي تلك الفئة التي يقع فيها الربيع الأدنى (أي التي تقع فيها القراءة ذات الترتيب $\frac{\sum ك}{4}$).

٤ – تتحدد قيمة الربيع الأدنى داخل فئة الربيع الأدنى باستخدام العلاقة الآتية:

الربيع الأدنى = الحد الأدنى لفئة الربيع الأدنى + س . . . . (٢)

حيث: س = طول فئة الربيع الأدنى

$$\times \frac{\text{ترتيب الربيع الأدنى – التكرار المتجمع الصاعد قبل فئة الربيع الأدنى}}{\text{تكرار فئة الربيع الأدنى}}$$

وكذلك طريقة إيجاد قيمة الربيع الأعلى ($ر_3$) بالحساب هي نفسها طريقة إيجاد قيمة الربيع الأدنى ($ر_1$) مع ملاحظة أن ترتيب الربيع الأعلى

= $\frac{\sum ك}{4} \times 3$ ، وكذلك نستبدل فئة الربيع الأدنى ($ر_1$) بفئة الربيع الأعلى ($ر_3$) في العلاقة رقم (٢) السابقة.

و بتطبيق الخطوات السابقة على المثال رقم (٢) ــ في الباب الثاني ــ والخاص بالأجور اليومية التي حصل عليها ١٠٠ عامل في أحد المصانع نجد الآتي:

(أ) جدول رقم (١)

الجدول التكراري المتجمع الصاعد للأجور اليومية التي حصل عليها ١٠٠ عامل في أحد المصانع

فئات الأجر بالريال	عدد العمال (التكرار ــ ك)	أقل من الحد الأعلى للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	
٦٠ ــ	٥	اقل من ٧٠	٥	
٧٠ ــ	١٥	اقل من ٨٠	٢٠	
٨٠ ــ	٢٠	اقل من ٩٠	٤٠	← فئة الربيع الأدنى ($ر_1$)
٩٠ ــ	٣٠	اقل من ١٠٠	٧٠	
١٠٠ ــ	١٥	اقل من ١١٠	٨٥	← فئة الربيع الأعلى ($ر_3$)
١١٠ ــ	١٠	اقل من ١٢٠	٩٥	
١٢٠ ــ ١٣٠	٥	اقل من ١٣٠	١٠٠	
المجموع	١٠٠			

(ب) ترتيب الربيع الأدنى ($ر_1$) $= \frac{مج\ ك}{٤} = \frac{١٠٠}{٤} = ٢٥$

ومنه نجد أن فئة الربيع الأدنى هي الفئة (٨٠ ــ)

(جـ) قيمة الربيع الأدنى ($ر_1$) $= ٨٠ + ١٠ \times \frac{٢٥ - ٢٠}{٢٠}$

$= ٨٠ + ٢,٥ = ٨٢,٥$ ريال

وكذلك نجد أن: ترتيب الربيع الأعلى ($ر_{٣}$) $= \frac{\text{مجـ ك}}{٤} \times ٣$

$$= \frac{١٠٠}{٤} \times ٣ = ٧٥$$

ومنه نجد أن فئة الربيع الأعلى هي الفئة (١٠٠ـــ)

، قيمة الربيع الأعلى ($ر_{٣}$) $= ١٠٠ + ١٠ \times \frac{٧٥ - ٧٠}{١٥}$

$$= ١٠٠ + ٣,٣$$

$= ١٠٣,٣$ ريال

وعلى ذلك نجد أن قيمة نصف المدى الربيعي (الانحراف الربيعي)

$$= \frac{ر_{٣} - ر_{١}}{٢}$$

$$= \frac{١٠٣,٣ - ٨٢,٥}{٢}$$

$$= \frac{٢٠,٨}{٢}$$

$= ١٠,٤$ ريالا

وطريقة إيجاد قيمة الربيع الأدنى ($ر_{١}$) بالرسم تتلخص في الخطوات الآتية:

(أ) نكون جدولا تكراريا متجمعا صاعدا (كما في حالة الحساب تماماً)

(ب) نرسم المنحنى المتجمع الصاعد (كما سبق شرحه في الباب الثاني)

(جـ) نعين ترتيب الربيع الأدنى ($ر_{١}$) [وهو $\frac{\text{مجـ ك}}{٤}$] على المحور الرأسي.

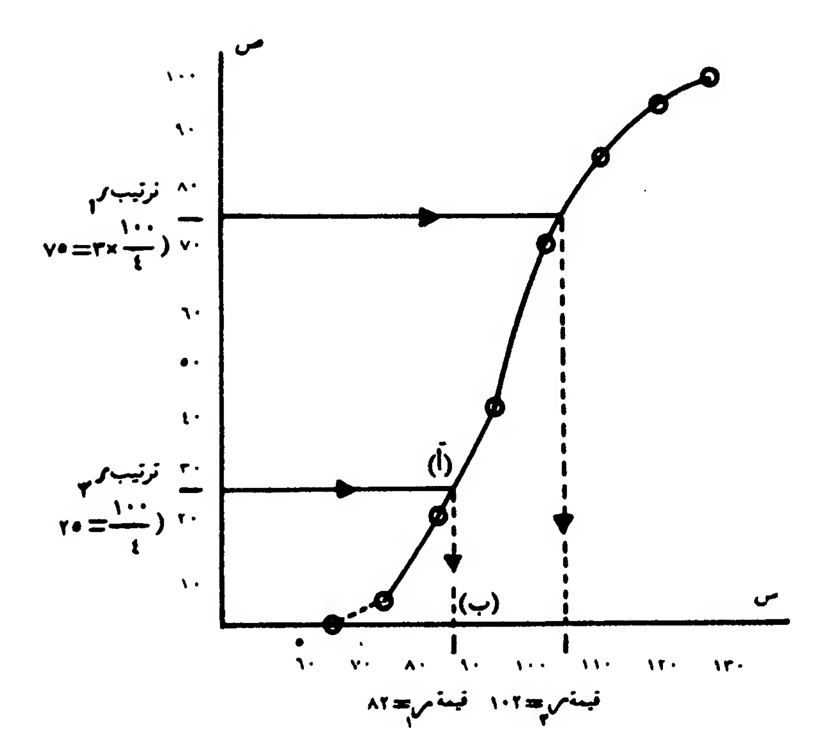
(د) تحدد قيمة الربع الأدنى ($ر_1$) بأن نرسم مستقيما أفقياً من نقطة ترتيب ($ر_1$) يوازى المحور الأفقي و يقطع المنحنى المتجمع الصاعد من نقطة (أ) نسقط منها عموداً على المحور الأفقي فيقابله في النقطة (ب) تكون هي قيمة الربع الأدنى ($ر_1$).

وكذلك نجد أن طريقة إيجاد قيمة الربع الأعلى ($ر_3$) بالرسم هي نفسها طريقة إيجاد قيمة الربع الأدنى، مع ملاحظة أن ترتيب الربع الأعلى ($ر_3$).

$$= \frac{مج ك}{٤} \times ٣$$

وبعد إيجاد قيمة $ر_1$ ، $ر_3$ تطبق القاعدة رقم (١) فنحصل على نصف المدى الربيعي كما يتضح من الرسم الآتي:

شكل رقم (١)
إيجاد قيمة الربيع الأدنى والأعلى بالرسم
للأجور اليومية التي حصل عليها ١٠٠ عامل في أحد المصانع



ومن الرسم نجد أن $ر_1$ = ٨٢ ، $ر_3$ = ١٠٢

∴ نصف المدى الربيعي (الانحراف الربيعي) $= \frac{م_٣ - م_١}{٢}$

$= \frac{٢٠}{٢} =$ ١٠ ريالات

وهي قريبة جداً من النتيجة التي حصلنا عليها بالحساب، وكلما كان الرسم دقيقاً حصلنا على نفس النتيجة التي نحصل عليها بالحساب.

٣- الانحراف المعياري:

وهو أهم مقاييس التشتت وأكثرها استعمالا في علم الإحصاء.

(أ) قانون الانحراف المعياري في حالة البيانات غير المبوبة:

نفرض أن قراءات الظاهرة التي لدينا هي: $س_١$، $س_٢$، ....، $س_ن$ وأن وسطها الحسابي هو $\bar{س}$. ومن التعريف السابق للتشتت تكون هذه المجموعة متجانسة إذا كانت قريبة من بعضها البعض أي أن انحرافاتها عن وسطها الحسابي صغيرة، وتكون مشتتة ومبعثرة إذا كانت متباعدة عن بعضها البعض، أي انحرافاتها عن وسطها الحسابي كبيرة، وعلى ذلك يمكن أخذ مجموع انحرافات القراءات عن وسطها الحسابي أي $\sum (س - \bar{س})$ كمقياس للتشتت.

ولكن مجموع انحرافات القراءات عن وسطها الحسابي دائما يساوى صفر وذلك لأن بعض الانحرافات يكون موجباً والبعض الآخر سالباً، وعند جمع هذه الانحرافات يلاشي الموجب منها السالب، وعلى ذلك لايمكن استخدامه كمقياس للتشتت، ويمكن التغلب على ذلك بتربيع هذه الانحرافات وذلك للتخلص من الإشارات، و بذلك يمكن أخذ مجموع مربعات انحرافات القراءات عن وسطها الحسابي [$\sum (س - \bar{س})^٢$] كمقياس للتشتت.

ولكن المقياس السابق يتأثر بعدد القراءات الداخلة في حسابه، ويمكن التغلب على هذه الصعوبة بقسمته على عدد القراءات (ن) الداخلة في حسابه فنحصل على ما يسمى بالتباين و يرمز له بالرمز $ع^٢$، أي أن:

$$ع_{س}^٢ = \frac{١}{ن} \sum (س - \bar{س})^٢$$

ونلاحظ أن وحدات التباين هي مربع الوحدات الأصلية. فإذا كانت وحدات القراءات الأصلية بالريال تكون وحدات التباين $(ريال)^٢$ وهكذا، ونظرا لأن مقياس التشتت يجب أن يكون له نفس وحدات القراءات الأصلية لذلك نأخذ الجذر التربيعي للتباين فنحصل على ما يسمى بالانحراف المعياري و يرمز له بالرمز (ع)، أي أن الانحراف المعياري هو:

$$ع_س = \sqrt{\frac{١}{ن} \sum (س - \bar{س})^٢} \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad (٣)$$

مثال رقم (١):

أوجد الانحراف المعياري للقراءات الآتية:

٤٠ ٤٤ ٢٨ ٣٦ ٣٢

الحل

الوسط الحسابي $\bar{س} = ٣٦$

انحرافات القراءات عن وسطها الحسابي $(س - \bar{س})$

= ٤ ٨ − ٨ صفر − ٤

مربع انحرافات القراءات عن وسطها الحسابي $(س - \bar{س})^٢$

= ١٦ ٦٤ ٦٤ صفر ١٦

مجموع انحرافات القراءات عن وسطها الحسابي $\sum (س - \bar{س})^٢ = ١٦٠$

$$\text{التباين} = ع^٢_س = \frac{١}{ن} \sum (س - \bar{س})^٢ = \frac{١٦٠}{٥} = ٣٢$$

$$\text{الانحراف المعياري} = ع_س = \sqrt{\frac{١}{ن} \sum (س - \bar{س})^٢}$$

$$= \sqrt{٣٢} \qquad = ٤ \sqrt{٢}$$

$$= ٤ \times ١,٤١٤ = ٥,٦٥٦$$

وكما نعلم فالوسط الحسابي غالباً ما يكون رقماً يحتوى على كسور، و بالتالي فإن انحرافات القراءات عنه تكون أرقاماً كسرية، وعلى ذلك يكون حساب الانحراف المعياري باستخدام الصيغة السابقة (رقم ٣) صعباً، ولتسهيل العمليات الحسابية نستخدم الصيغة الآتية وهي مساوية للصيغة السابقة:

$$ع_س = \sqrt{\frac{1}{ن} \sum س^2 - \bar{س}^2} \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad (٤)$$

و بتطبيق هذه الصيغة على المثال السابق نجد أن :

س :	٤٠	٤٤	٢٨	٣٦	٣٢
$س^2$:	١٦٠٠	١٩٣٦	٧٨٤	١٩٢٦	١٠٢٤

$\sum س^2 = ٦٦٤٠$ ، $\bar{س} = ٣٦$

∴ الانحراف المعياري $ع_س = \sqrt{\frac{٦٦٤٠}{٥} - (٣٦)^2}$

$= \sqrt{١٣٢٨ - ١٢٩٦} = \sqrt{٣٢} = ٥,٦٥٦$

وهونفس الجواب السابق الحصول عليه باستخدام الصيغة رقم (٣) .

ملحوظة :

هناك بعض الخواص لتسهيل العمليات الحسابية ، ونظراً لانتشار استخدام الآلات الحاسبة فسنكتفي بذكرها .

الخاصية الأولى : إذا طرحنا (أوجمعنا) من جميع القيم مقداراً ثابتاً (يسمى وسطاً فرضياً ونرمز له بالرمز أ) فإن الانحراف المعياري للقراءات الأصلية ($ع_س$) يساوى الانحراف المعياري للقراءات الجديدة ($ع_ح$) (الانحرافات عن الوسط الفرضي) .

فإذا كانت القيم الأصلية (س) : $س_1$ ، $س_2$ ، .... ، $س_ن$

،كانت القيم الجديدة : $[س_1 - أ ، س_2 - أ ، .... ، س_ن - أ]$

و يرمز لها بـ(ح) هي : $[ح_1 ، ح_2 ، ... ، ح_ن]$

فإن $ع_س = ع_ح$

الخاصية الثانية : إذا كانت جميع القراءات الجديدة (الانحرافات عن الوسط الفرضي) ح تقبل القسمة على مقدار ثابت ف ، فنحصل على قراءات مبسطة ولتكن ص . فيكون الانحراف المعياري للقراءات الأصلية ($ع_س$) يساوى الانحراف المعياري للقراءات المبسطة $ع_ص$ مضروبا في المقدار الثابت .

فإذا كانت القيم الأصلية (س) هي: $س_1، س_2، ...، س_ن$

وكانت القيم الجديدة (ح) هي: $ح_1، ح_2، ...، ح_ن$

والقراءات المبسطة $\left[\frac{ح_1}{ف}، \frac{ح_2}{ف}، ...، \frac{ح_ن}{ف}\right]$
$ص_1، ص_2، ...، ص_ن$

فإن: $ع_س = ف \, . \, ع_ص$

(ب) حساب الانحراف المعياري في حالة البيانات المبوبة (التوزيعات التكرارية):

إذا كانت البيانات مصنفة على هيئة توزيع تكراري، فإنه يمكن حسب الانحراف المعياري باستخدام الصيغة الآتية:

$$ع_س = \sqrt{\frac{\sum س^2 ك}{\sum ك} - \bar{س}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

حيث س : ترمز لمراكز الفئات

ك : هو التكرار المناظر لها

$\sum$ ك : مجموع التكرارات

و بتطبيق هذه الصيغة على التوزيع التكراري للأجور اليومية التي حصل عليها ١٠٠ عامل في أحد المصانع نتبع الخطوات الآتية:

١ ـ نضيف عموداً لمراكز الفئات (س)

٢ ـ نضرب تكرار كل فئة في مركز هذه الفئة ونضع حاصل الضرب (س × ك) في العمود الرابع من الجدول.

٣ ـ نوجد س ٢ ك في العمود الأخير من الجدول وذلك بضرب مركز كل فئة في حاصل الضرب المناظر س ك (السابق الحصول عليه في العمود الرابع) و بذلك نحصل على الجدول الآتي:

جدول رقم (٢)

إيجاد الانحراف المعياري للأجور اليومية التي حصل عليها ١٠٠ عامل في أحد المصانع

فئات الأجر بالريال	عدد العمال (التكرار = ك)	مراكز الفئات س	س × ك	س٢ × ك (= س × س ك)
٦٠ —	٥	٦٥	٣٢٥	٢١١٢٥
٧٠ —	١٥	٧٥	١١٢٥	٨٤٣٧٥
٨٠ —	٢٠	٨٥	١٧٠٠	١٤٤٥٠٠
٩٠ —	٣٠	٩٥	٢٨٥٠	٢٧٠٧٥٠
١٠٠ —	١٥	١٠٥	١٥٧٥	١٦٥٣٧٥
١١٠ —	١٠	١١٥	١١٥٠	١٣٢٢٥٠
١٢٠ — ١٣٠	٥	١٢٥	٦٢٥	٧٨١٢٥
المجموع	١٠٠	—	٩٣٥٠	٨٩٦٥٠٠

وباستخدام الصيغة رقم (٥) نجد أن:

$$ع_س = \sqrt{\frac{\sum س^2 ك}{\sum ك} - \bar{س}^2}$$

$$\text{حيث } \bar{س} = \frac{\sum س ك}{\sum ك} = \frac{٩٣٥٠}{١٠٠} = ٩٣,٥ \text{ ريالا}$$

$$= \sqrt{\frac{٨٩٦٥٠٠}{١٠٠} - (٩٣,٥)^2}$$

$$= \sqrt{٨٩٦٥ - ٨٧٤٢,٢٥}$$

$$= \sqrt{٢٢٢,٧٥}$$

$$= ١٤,٩ \text{ ريال}$$

معامل الاختلاف:

بمراجعة مقاييس التشتت التي ذكرناها حتى الآن نجد أنها جميعاً مقاييس محسوبة بدلالة وحدات المتغير الذي ندرسه. وعلى ذلك فإذا أردنا مقارنة درجة التشتت في مجموعتين أو صفتين متصلتين بنفس المجموعة حال دون ذلك اختلاف وحدات القياس في الحالتين، فمثلا إذا أردنا مقارنة التشتت في أطوال مجموعة بالتشتت في أعمار نفس المجموعة أو مجموعة أخرى فنجد أن مقياس التشتت في المجموعة الأولى يكون بالسنتيمترات بينما يكون في المجموعة الثانية بالسنوات، ولا يعقل أن نقارن بين سنتيمترات وسنوات ونقول أن السنتيمترات أكبر أو أقل تشتتاً من السنوات.

ولأجراء مثل هذه المقارنة لابد من التخلص من وحدات القياس وذلك باستخدام مقياس نسبي يخلصنا من هذه الوحدات المختلفة، وهذا المقياس يسمى «معامل الاختلاف» ونحصل عليه بنسبة تشتت المجموعة إلى متوسطها وضرب الناتج في ١٠٠ كي نحصل على نسبة مئوية لا تمييز لها.

وأكثر معاملات الاختلاف انتشارا هو الناتج من قسمة الانحراف المعياري على الوسط الحسابي للمجموعة أي أن

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{ع_{س}}{\bar{س}} \times ١٠٠ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (٦)$$

ففي المثال الخاص بتوزيع الأجور اليومية التي حصل عليها ١٠٠ عامل في أحد المصانع نجد أن

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{١٤{,}٩}{٩٣{,}٥} \times ١٠٠ = ١٦\%$$

وأحيانا نضطر إلى استخدام صور أخرى لمعامل الاختلاف وذلك إذا لم يكن في الإمكان حساب الانحراف المعياري والوسط الحسابي وذلك كما في حالة التوزيعات المفتوحة، ففي هذه الحالة نستخدم معامل الاختلاف الآتي:

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{نصف المدى الربيعي}}{\text{الوسيط}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{ر_{٣} - ر_{١}}{٢\,ر_{٢}} \times ١٠٠ \quad . \; . \; . \quad (٧)$$

ويجب ملاحظة أن معامل الاختلاف لايقتصر استعماله على الحالات التي تريد فيها مقارنة تشتت مجموعتين مختلفتين في وحدات القياس ، بل يستخدم أيضا في مقارنة مجموعتين مقيستين بنفس الوحدات وتختلفان كثيراً في متوسطهما ، ففي مثل هذه الحالات لا تصلح مقاييس التشتت المطلقة للمقارنة بينهما .

معامل الالتواء :

سبق أن عرفنا أن الالتواء هو بعد المنحنى عن التماثل . وذكرنا أن الالتواء إما أن يكون التواء موجباً أي إلى اليمين أو التواء سالبا أي إلى اليسار، وأوضحنا كذلك كيفية حساب المتوسطات ومقاييس التشتت وفائدتها في تلخيص و وصف التوزيعات المختلفة . إلا أن هذه المقاييس لا تكفي بمفردها لتلخيص ومقارنة هذه التوزيعات إذ يتساوى توزيعان تكراريان، من حيث المتوسط والانحراف المعياري ولكنهما يختلفان من حيث الالتواء ، فقد يكون التوائهما في اتجاه واحد ولكن بمقادير مختلفة أو تتساوى درجة التوائهما ولكنهما يختلفان في الاشارة . ويمكن معرفة نوع التواء المنحنى (سالب أو موجب) ودرجة التوائه (بسيط أو حاد) من شكل المنحنى نفسه ، إلا أن هذا لايعطي مقياساً رقمياً دقيقاً للالتواء ولذلك فمن المهم الوصول إلى بعض المقاييس الرقمية التي يمكن استخدامها لقياس الالتواء .

فمن المعروف انه في حالة المنحنيات المتماثلة ينطبق الوسط الحسابي والوسيط والمنوال على بعضها تماماً ، وكلما بعد المنحنى عن التماثل بعدت هذه القيم عن بعضها وعلى ذلك فإن هذه الفروق بين مقاييس الموضع الثلاثة تصلح لقياس التواء التوزيع ، فيمكننا إذن قياس الالتواء بأحد المقدارين الآتيين :

$$(\overline{س} - ل) \qquad \text{أو} \qquad ٣(\overline{س} - م_٢)$$

إلا أن أحد هذين المقدارين لايكفي لتعيين مقدار الالتواء تماماً . إذ أن الفرق قد يكون كبيراً والالتواء صغيراً لأن تشتت المجموعة كبير، أو قد يكون الفرق صغيراً والالتواء كبيراً لأن تشتت المجموعة صغير. لذلك يحسن قياس الالتواء بمعامل يشمل هذا الفرق أو بمثاله منسوباً إلى أحد مقاييس التشتت ، وأهم هذه المعاملات «معامل بيرسون» للالتواء وله صورتان هما :

$$ت_١ = \frac{\overline{س} - ل}{ع} \quad \text{.......................} \quad (٨)$$

$$ت_٢ = \frac{٣(\overline{س} - م_٢)}{ع} \quad \text{.......................،} \quad (٩)$$

وهذا المعامل الأخير أفضل من المعامل الأول وتنحصر قيمته بين ±٣

وإذا رجعنا إلى المثال الخاص بتوزيع الأجور الذي حصل عليه ١٠٠ عامل في أحد المصانع وحسبنا معاملات الالتواء السابقة له نجد أنها تكون على النحو الآتي:

$$ت_1 = \frac{\bar{س} - ل}{ع} = \frac{٩٣ر٥ - ٩٤ر٣}{١٤ر٩} = - ٠ر٥$$

أي أن الالتواء ضئيل جداً وسالب.

$$ت_2 = \frac{٣(\bar{س} - م_2)}{ع} = \frac{٣(٩٣ر٥ - ٩٣ر٣)}{١٤ر٩} = ٠ر٠٤$$

أي أن الالتواء ضئيل جداً وموجب.

و يلاحظ أننا حصلنا على نتائج مختلفة لمعاملات الالتواء وهذا لايناقض بعضه إذ أن كل معامل يقيس الالتواء على أساس يخالف المعاملات الأخرى، ولذلك فعند مقارنة التواء توزيعات مختلفة يجب استخدام نفس المعامل. وعلى العموم نجد أن معاملات الالتواء لتوزيع أجر ١٠٠ عامل ضئيلة جداً وهذا يعني أن التوزيع قريب جداً من التماثل.

وهناك مقياس آخر للالتواء أكثر دقة و يتوقف على ما يسمى بعزوم المنحنى، وهذا يتطلب الإلمام بفكرة وافية عن موضوع العزوم وهذا ليس مجاله هذا الكتاب.

مثال عام

الجدول الآتي يوضح التوزيع التكراري لأوزان ٨٠ شخصاً

الوزن بالكيلوجرام	٦٢ـ	٦٦ـ	٧٠ـ	٧٤ـ	٧٨ـ	٨٢ـ	٨٦ـ٩٠
عدد الأشخاص	٣	٨	٢٠	٢١	١٤	١٠	٤

والمطلوب:

١ـ حساب قيمة الوسط الحسابي والانحراف المعياري للتوزيع.

٢ـ حساب قيمة الوسيط والانحراف الربيعي للتوزيع.

٣ ــ حساب معامل الاختلاف .

٤ ــ هل هذا التوزيع متماثل ؟ علل إجابتك .

الحل

١ ــ حساب قيمة الوسط الحسابي والانحراف المعياري :

فئات الوزن (ف)	عدد الأشخاص (التكرار = ك)	مراكز الفئات (= س)	مراكز الفئات ×التكرار (س × ك)	س^{٢} × ك = (س×س ك)
٦٢ ــ	٣	٦٤	١٩٢	١٢٢٨٨
٦٦ ــ	٨	٦٨	٥٤٤	٣٦٩٩٢
٧٠ ــ	٢٠	٧٢	١٤٤٠	١٠٣٦٨٠
٧٤ ــ	٢١	٧٦	١٥٩٦	١٢١٢٩٦
٧٨ ــ	١٤	٨٠	١١٢٠	٨٩٦٠٠
٨٢ ــ	١٠	٨٤	٨٤٠	٧٠٥٦٠
٨٦ ــ ٩٠	٤	٨٨	٣٥٢	٣٠٩٧٦
المجموع	٨٠	ــ	٦٠٨٤	٤٦٥٣٩٢

الوسط الحسابي: $\bar{س} = \frac{\sum س ك}{\sum ك} = \frac{٦٠٨٤}{٨٠} = ٧٦,٠٥ = ٧٦,١$ كجم

الانحراف المعياري: $ع_س = \sqrt{\frac{\sum س^{٢} ك}{\sum ك} - \bar{س}^{٢}}$

$= \sqrt{\frac{٤٦٥٣٩٢}{٨٠} - (٧٦,١)^{٢}}$

$= \sqrt{٥٨١٧,٤ - ٥٧٩١,٢١}$

$= \sqrt{٢٦,١٩}$

$= ٥,١$ كجم

٢ـ لحساب قيمة الوسيط والانحراف الربيعي للتوزيع :

تكون جدول تكراري متجمع صاعد ومنه نحسب المطلوب كما يلي :

(أ) جدول تكراري متجمع صاعد لأوزان ٨٠ شخصاً

فئات الوزن	عدد الأشخاص (التكرار)	أقل من الحد الأعلى للفئة	التكرار المتجمع الصاعد	
٦٢ـــ	٣	اقل من ٦٢	صفر	
٦٦ـــ	٨	اقل من ٦٦	٣	
		اقل من ٧٠	١١	
٧٠ـــ	٢٠	اقل من ٧٤	٣١	← فئة ($م_1$)
٧٤ـــ	٢١	اقل من ٧٨	٥٢	← فئة ($م_2$)
٧٨ـــ	١٤	اقل من ٨٢	٦٦	← فئة ($م_3$)
٨٢ـــ	١٠	اقل من ٨٦	٧٦	
٨٦ـــ ٩٠	٤	اقل من ٩٠	٨٠	
المجموع	٨٠			

(ب) حساب قيمة الوسيط ($م_2$):

$$\text{ترتيب } م_2 = \frac{\sum ك}{2} = \frac{80}{2} = 40$$

$$\text{قيمة } م_2 = 74 + 4 \times \frac{40 - 31}{21}$$

$$= 74 + 4 \times \frac{9}{21} = 74 + 1{,}7 = 75{,}7 \text{ كجم}$$

(جـ) حساب قيمة الانحراف الربيعي (نصف المدى الربيعي). لابد من حساب قيمة كل من الربيع الأعلى ($م_3$) والربيع الأدنى ($م_1$) أولا، ثم إيجاد الفرق بينهما وقسمته على ٢ فنحصل على المطلوب كما يلي :

١ــ حساب قيمة الربيع الأدنى ($ر_{١}$):

- ترتيب $ر_{١} = \frac{\sum ك}{٤} = \frac{٨٠}{٤} = ٢٠$

- قيمة $ر_{١} = ٧٠ + ٤ \times \frac{٢٠ - ١١}{٢٠}$

$$= ٧٠ + ٤ \times \frac{٩}{٢٠}$$

$= ٧٠ + ١,٨ = ٧١,٨$ كجم

١ــ حساب قيمة الربيع الأعلى ($ر_{٣}$)

ترتيب $ر_{٣} = \frac{\sum ك}{٤} \times ٣ = \frac{٨٠}{٤} \times ٣ = ٦٠$

قيمة $ر_{٣} = ٧٨ + ٤ \times \frac{٦٠ - ٥٢}{١٤}$

$$= ٧٨ + ٤ \times \frac{٨}{١٤}$$

$= ٧٨ + ٢,٣ = ٨٠,٣$ كجم

∴ الانحراف الربيعي (نصف المدى الربيعي) $= \frac{ر_{٣} - ر_{١}}{٢}$

$$= \frac{٨٠,٣ - ٧١,٨}{٢} = \frac{٨,٥}{٢}$$

$= ٤,٣$ كجم

٣ـ حساب معامل الاختلاف:

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{ع_س}{\bar{س}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٥,١}{٧٦,١} \times ١٠٠$$

$$= ٦,٧ \%$$

٤ـ لمعرفة هل هذا التوزيع متماثل من عدمه:

نوجد معامل الالتواء للتوزيع، فإذا كان يساوى صفراً دل ذلك على أن التوزيع متماثل، وإذا كان لايساوى صفراً كان التوزيع غير متماثل (ملتو)

$$ت_٢ = \frac{٣(\bar{س} - م_٢)}{ع_س}$$

$$= \frac{٣(٧٦,١ - ٧٥,٧)}{٥,١} = ٠,٢$$

أي أن التوزيع غير متماثل لأن معامل الألتواء لايساوى الصفر، وملتوجهة اليمين لأن إشارة معامل الالتواء موجبة.

تمارين

١ـ الجدول الآتي يوضح توزيع الدخل السنوي بآلاف الريالات لعينة من الأسر في إحدى المدن.

فئات الدخل	٤٠ـ	٤٨ـ	٥٦ـ	٦٤ـ	٧٢ـ	٨٠ـ	٨٨ ـ
عدد الأسر	٨	١٦	٢٤	٣٦	٣٠	١٨	٨

والمطلوب:

١ـ حساب قيمة الوسط الحسابي والانحراف المعياري للتوزيع.

٢ـ حساب قيمة الوسيط ونصف المدى الربيعي للتوزيع.

٣ـ حساب قيمة منوال التوزيع.

٤ـ حساب معامل الإختلاف.

٥ـ هل هذا التوزيع متماثل؟ علل إجابتك.

٢ ــ الجدول الآتي الآن يوضح توزيع عينة من ٤٠ منشأة حسب عدد المشتغلين بها .

فئات عدد المشتغلين	١٠ــ	١٥ــ	٢٠ــ	٢٥ــ	٣٠ــ	٣٥ــ	٤٠ــ	٤٥ــ٥٠
عدد المنشآت	٤	٤	٦	١٠	٦	٥	٤	١

والمطلوب :

١ ــ حساب قيمة الوسط الحسابي والانحراف المعياري للتوزيع .

٢ ــ حساب قيمة الوسيط والانحراف الر بيعي التوزيع .

٣ ــ حساب قيمة منوال التوزيع .

٤ ــ حساب معامل الاختلاف .

٥ ــ هل هذا التوزيع متماثل ؟ علل إجابتك .

٣ ــ الجدول الآتي يبين توزيع سرعة الرياح بالعقدة في ١٢٠ يوماً باحدى المدن :

سرعة الرياح	٢-	٨-	١٤-	٢٠-	٢٦-	٣٢-	٣٨-	٤٤ -
عدد الأيام	٢	٨	١٨	٢٤	٣٠	١٨	١٢	٨

والمطلوب :

١ ــ حساب قيمة المنوال والوسيط لهذا التوزيع

٢ ــ حساب قيمة الر بيع الأدنى والأعلى للتوزيع .

٣ ــ حساب قيمة الانحراف المعياري للتوزيع واستخدامه في إيجاد مقياس لالتواء هذا التوزيع .

٤ ــ حساب معامل الاختلاف .

٥ ــ هل هذا التوزيع متماثل ؟ علل إجابتك .

٤ ــ بدراسة توزيعين عن ظاهرتين مختلفتين تبين الآتي :

الظاهرة الأولى : وسطها الحسابي = ٧٥ ، إنحرافها المعياري = ١٥

الظاهرة الثانية : كانت بياناتها كالآتي :

الفئات	١٨-	٢٨-	٣٨-	٤٨-	٥٨-٦٨
التكرار	٢٦	٥٩	١٠٥	٧٩	٣١

فأي الظاهرتين أكثر تشتتاً ؟

٥ ــ الجدول الآتي يوضح توزيع وفيات الأطفال دون سن السنة بالألف في إحدى حسب أعمارهم بالشهر.

فئات السن بالشهر	٠ــ	٢ــ	٤ــ	٦ــ	٨ــ	١٠ــ ١٢
عدد الوفيات (بالألف)	٢٧	٢٢	٢٠	٢٣	١٩	٩

والمطلوب :

١ ــ حساب معامل الاختلاف لهذا التوزيع .

٢ ــ معرفة هل هذا التوزيع متماثل من عدمه ، مع تفسير إجابتك .



الباب الخامس

الارتباط والانحدار المستقيم

الارتباط والانحدار المستقيم

١ـ الارتباط :

تكلمنا في الفصول السابقة عن المفاهيم الاحصائية الخاصة بوصف مجموعة من قيم ظاهرة واحدة وعن الخصائص الأساسية للتوزيع التكراري لهذه الظاهرة وذلك عن طريق حساب بعض المقاييس الإحصائية مثل مقاييس الموضع ومقاييس التشتت والالتواء وغيرها .

وفي هذا الباب سندرس نوعا آخر من أنواع التحاليل الإحصائية الخاصة بالعلاقة بين ظاهرتين ، فإذا أخذنا مجموعة من طلبة الجامعة وسألنا كلا منهم عن وزنه وطوله فإنه يكون لدينا مجموعة من البيانات أو القراءات عن متغيرين أو ظاهرتين هما ظاهرة الوزن وظاهرة الطول ، هذان المتغيران توجد بينهما علاقة بمعنى أن وزن الطالب يتبع في تغييره ــ بصفة عامة الطول ، فكلما زاد طول الطالب زاد وزنه بصفة عامة . هذه العلاقة بين المتغيرين تسمى بالارتباط ، و يقال عن هذين المتغيرين أو الظاهرتين أنهما مرتبطان . أي أن الإرتباط هو العلاقة بين ظاهرتين أو أكثر.

ونلاحظ أن هناك درجات متفاوتة من العلاقة بين المتغيرين ، فلدينا من ناحية الارتباط التام بين متغيرين بمعنى أنه إذا عرفت قيمة أحد المتغيرين عرفنا قيمة المتغير الآخر بالضبط . و يعبر عن العلاقة بين المتغيرين في هذه الحالة بواسطة معادلة رياضية ، ومن أمثلة المتغيرات المرتبطة إرتباطاً تاماً طول ضلع المربع ومحيطه فإذا قيل لنا أن طول ضلع المربع ٥ سم استنتجنا فوراً أن محيط هذا المربع ٢٠ سم ، فمن المستحيل أن يوجد مربع طول ضلعه ٥ سم ومحيطه لا يساوى ٢٠ سم ، وإذا علمنا أن طول ضلع المربع ــ س استنتجنا فوراً أن محيط المربع ص= ٤ س وإذا رسمنا محورين متعامدين ووقعنا على الشكل النقط التي بعدها الأفقي هو طول ضلع المربع و بعدها الرأسي هو محيط المربع فإن جميع هذه النقط سوف تقع على خط مستقيم معادلته في الواقع ص= ٤ س ولا يمكن أن تقع إحدى النقط خارج هذا المستقيم .

ولدينا في الناحية الأخرى الارتباط المنعدم بين متغيرين ، بمعنى أنه إذا عرفت قيمة أحد المتغيرين استحال علينا معرفة قيمة المتغير الآخر. ومن أمثلة هذه المتغيرات العلاقة بين طول الطالب والدرجة التي يحصل عليها في إحدى المواد ، فإذا رسمنا محورين متعامدين و وقعنا النقط التي بعدها الأفقي طول الطالب و بعدها الرأسي الدرجة التي يحصل عليها في الامتحان فسوف نجد هذه النقط منتشرة ومبعثرة دون أي رابط بينها .

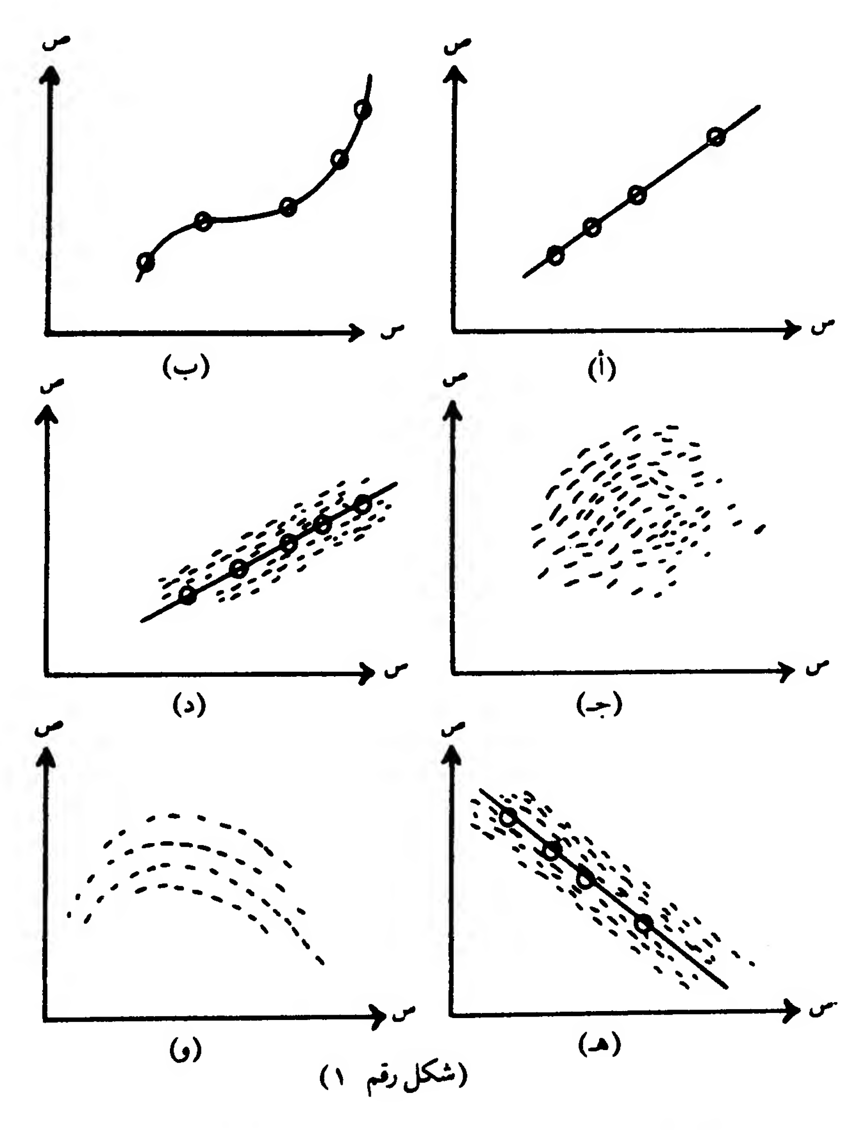
وبين هاتين الدرجتين ــ الارتباط التام والارتباط المنعدم ــ يوجد النوع الشائع من الارتباط والذي فيه يتبع أحد المتغيرين الآخر في تغيره إلى حد ما ، ومن أمثلة هذا النوع العلاقة بين الدخل والاستهلاك وبين الطلب والسعر لسلعة ما وبين أجر العامل وعمره وبين درجات الطلاب في مادتي الرياضيات والإحصاء وبين طول الطلبة وأوزانهم .

فوزن الطالب يتزايد عموماً بتزايد طوله ، ولكن هذه ليست قاعدة عامة إذ أن هناك طلابا طوالا ولكن أوزانهم قليلة ، كما يوجد بعض الطلاب القصار وأوزانهم كبيرة . ولكننا نجد أن هناك اتجاها عاما لتزايد الوزن بزيادة الطول ، وهذا الاتجاه العام هو الذي يعبر عن العلاقة بين المتغيرين . وهذا النوع من الارتباط يسمى « الارتباط غير التام » .

وليس من الضروري أن يتزايد المتغيران معاً أو يتناقصان معاً حتى يكونا مرتبطين ، فهناك حالات تكون العلاقة بين المتغيرين فيها هي تناقص أحدهما بتزايد الآخر ، ومثال ذلك العلاقة أو الارتباط بين الكمية المطلوبة من سلعة ما وسعرها . وإذا تزايد المتغيران معاً وتناقصا معاً قيل أن بينهما ارتباطاً طردياً اما إذا تناقص أحد المتغيرين بتزايد الآخر قيل أن بينهما ارتباطاً عكسياً .

٢ ــ الانحدار :

لدارسة العلاقة بين ظاهرتين س ، ص نفرض أن لدينا مجموعة عددها (ن) من أزواج القيم من الظاهرتين ، ونعبر عن هذه القيم بالنقط ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$) ، .... ، ($س_ن$ ، $ص_ن$) . نوقع أو نمثل هذه القيم أو النقط في المستوى بحيث يمثل المحور الأفقي إحدى الظاهرتين ولتكن الظاهرة س والمحور الرأسي الظاهرة ص فنحصل على شكل يسمى « شكل الانتشار » للمتغيرين (الظاهرتين) يبين انتشار النقط وقربها أو بعدها عن منحنى يبين العلاقة بين المتغيرين . ويساعد التمثيل البياني على معرفة نوع ودرجة العلاقة بين المتغيرين ، ويأخذ شكل الانتشار صوراً مختلفة تتوقف على نوع العلاقة بين المتغيرين كما في الشكل الآتي :



(شكل رقم ١)

فنلاحظ أنه في حالة الارتباط التام تقع النقط جميعها على خط مستقيم أو على منحنى أملس كما في الشكل رقم (أ)، و(ب) وفي حالة الارتباط المنعدم تنتشر النقط في جميع أرجاء شكل الانتشار دون رابط بينهما كما في شكل (حـ). والشكل (د) يبين وجود ارتباط طردي بين المتغيرين فنلاحظ بصفة عامة أنهما يتزايدان معاً و يتناقصان معاً كما نجد أن الاتجاه العام للتزايد هو خط مستقيم أي أن العلاقة بين س، ص يمكن التعبير عنها بواسطة الخط المستقيم الذي يتوسط النقط في شكل الانتشار، هذا المستقيم يسمى «خط الانحدار» وكلما اقتربت النقط من هذا الخط أي كلما قل انتشارها حوله كلما زادت درجة الارتباط بين المتغيرين، بينما الشكل (هـ) يبين وجود ارتباط عكسي بين المتغيرين فنلاحظ بصفة عامة أنه كلما زاد أحد المتغيرين نقص المتغير الآخر،

وهناك حالات لايكون فيها الاتجاه العام للنقط مستقيما بل يكون على شكل منحنى كما في الشكل (و) و يسمى المنحنى الذي يتوسط النقط «بمنحنى الانحدار».

وسنقتصر في دراستنا الحالية على الارتباط المستقيم بين متغيرين أي حينما يكون منحنى الانحدار خطاً مستقيماً، وستنحصر دراستنا في نقطتين:

١ــ إيجاد مقياس لدرجة الارتباط بين المتغيرين (مقياس الارتباط).
٢ــ إيجاد المعادلة الرياضية التي تمثل هذه العلاقة (خط الانحدار).

اولاــ مقاييس الارتباط

١ــ معامل ارتباط بيرسون:

تقاس درجة الارتباط بين الظواهر بواسطة معامل يسمى معامل الارتباط و يرمز له عادة بالرمز (ر). فنفرض أن لدينا مجموعة مكونة من (ن) فرداً (طلاب إحدى الجامعات مثلا) وحصلنا من هؤلاء الأفراد على بيانات عن قيم ظاهرتين (مثل الطول والوزن) ورمزنا للظاهرة الأولى بالرمز س والظاهرة الثانية بالرمز ص فتكون البيانات التي لدينا على الصورة:

الظاهرة الأولى (س): $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، .. .. ، $س_ن$

والظاهرة الثانية (ص): $ص_1$ ، $ص_2$ ، $ص_3$ ، .. .. ، $ص_ن$

حيث ($س_ر$ ، $ص_ر$) هي قيم الظاهرتين للفرد الرائى.

ويحسب معامل الارتباط بين الظاهرتين س ، ص من العلاقة الآتية:

$$ر = \frac{\frac{1}{ن}\sum س ص - \bar{س}\ \bar{ص}}{ع_س \quad ع_ص} \quad .. \quad .. \quad .. \quad (1)$$

حيث: $\bar{س}$: الوسط الحسابي للظاهرة س.

$\bar{ص}$: الوسط الحسابي للظاهرة ص.

$ع_س$: الانحراف المعياري للظاهرة س.

$ع_ص$: الانحراف المعياري للظاهرة ص.

وأن : $ع_س = \sqrt{\frac{1}{ن} \sum س^2 - \bar{س}^2}$

$$ع_س = \sqrt{\frac{1}{ن} \sum ص^2 - \bar{ص}^2}$$

ونلاحظ أن حساب معامل الارتباط من العلاقة (١) يتطلب حساب :

(أ) الوسط الحسابى للظاهرتين $\bar{س}$ ، $\bar{ص}$.

(ب) الانحراف المعيارى للظاهرتين $ع_س$ ، $ع_ص$

(حـ) مجموع حاصل ضرب قيم كل من الظاهرتين

وفيم يلى مثال يوضح خطوات الحل .

مثال رقم (١):

أوجد معامل الارتباط بين أطوال وأوزان مجموعة من طلبة إحدى الجامعات من البيانات الآتية:

الطول (بالسنتيمتر) :

١٦٤ ١٥٢ ١٨٤ ١٦٤ ١٧٦ ١٥٦ ١٦٨ ١٦٤

الوزن (بالكيلوجرام)

٥٢ ٤٠ ٦٠ ٥٢ ٦٠ ٤٢ ٥٠ ٥٢

الحل

نفرض أن س ترمز للطول وأن ص ترمز للوزن. ونكون الجدول الآتي:

	س	ص	س٢	ص٢	س ص
	١٦٤	٥٢	٢٦٨٩٦	٢٧٠٤	٨٥٢٨
	١٥٢	٤٠	٢٣١٠٤	١٦٠٠	٦٠٨٠
	١٨٤	٦٠	٣٣٨٥٦	٣٦٠٠	١١٠٤٠
	١٦٤	٥٢	٢٦٨٩٦	٢٧٠٤	٨٥٢٨
	١٧٦	٦٠	٣٠٩٧٦	٣٦٠٠	١٠٥٦٠
	١٥٦	٤٢	٢٤٣٣٦	١٧٦٤	٦٥٥٢
	١٦٨	٥٠	٢٨٢٢٤	٢٥٠٠	٨٤٠٠
	١٦٤	٥٢	٢٦٨٩٦	٢٧٠٤	٨٥٢٨
Σ	١٣٢٨	٤٠٨	٢٢١١٨٤	٢١١٧٦	٦٨٢١٦

(أ) الوسط الحسابي للظاهرتين:

$$\bar{\text{س}} = \frac{\Sigma \text{س}}{\text{ن}} = \frac{١٣٢٨}{٨} = ١٦٦$$

$$\bar{\text{ص}} = \frac{\Sigma \text{ص}}{\text{ن}} = \frac{٤٠٨}{٨} = ٥١$$

(ب) الانحراف المعياري للظاهرتين:

$$\text{ع}_{\text{س}} = \sqrt{\frac{١}{\text{ن}} \Sigma \text{س}^٢ - \bar{\text{س}}^٢} = \sqrt{\frac{٢٢١١٨٤}{٨} - (١٦٦)^٢}$$

$$= \sqrt{٢٧٦٤٨ - ٢٧٥٥٦} = \sqrt{٩٢}$$

$$\text{ع}_{\text{ص}} = \sqrt{\frac{١}{\text{ن}} \Sigma \text{ص}^٢ - \bar{\text{ص}}^٢} = \sqrt{\frac{٢١١٧٦}{٨} - (٥١)^٢}$$

$$= \sqrt{٢٦٤٧ - ٢٦٠١} = \sqrt{٤٦}$$

وعلى ذلك فمعامل الارتباط هو:

$$\text{ر} = \frac{\frac{1}{\text{ن}}\sum \text{س ص} - \bar{\text{س}}\,\bar{\text{ص}}}{\text{ع}_{\text{س}}\ \text{ع}_{\text{ص}}} = \frac{\frac{68216}{8} - 166 \times 51}{\sqrt{92}\ \sqrt{46}}$$

$$= \frac{8527 - 8466}{\sqrt{92}\ \sqrt{46}} = \frac{61}{46\sqrt{2}} = 0{,}94$$

بعض الملاحظات الهامة:

(أ) قيمة (ر) تكون موجبة في حالة الارتباط الطردي وسالبة في حالة الارتباط العكسي.

(ب) قيمة (ر) تساوى صفر في حالة الارتباط المنعدم وذلك لعدم وجود أي علاقة بين الظاهرتين.

(جـ) قيمة (ر) تساوي + ١ في حالة الارتباط الطردي التام وتساوي ــ ١ في حالة الارتباط العكسي التام.

(د) قيمة (ر) تتراوح بين ــ ١ ، + ١ وهذه القيمة تزداد كلما ازدادت درجة الارتباط.

وهناك بالإضافة إلى ما سبق خاصيتان يستفاد منهما في تسهيل حساب معامل الارتباط.

الخاصية الأولى:

قيمة (ر) لا تتغير إذا طرحنا (أو جمعنا) أي عدد ثابت من جميع قيم الظاهرة الأولى وأي عدد ثابت آخر من جميع قيم الظاهرة الثانية.

الخاصية الثانية:

قيمة (ر) لا تتغير إذا قسمنا (أو ضربنا) جميع قيم الظاهرة الأولى على عدد ثابت، وقسمنا (أو ضربنا) جميع قيم الظاهرة الثانية على أي عدد ثابت آخر.

مثال رقم (٢):

احسب معامل الارتباط لقراءات الطول والوزن الوارد في المثال رقم (١) باستخدام الخاصيتين السابقتين:

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
الطول	الوزن	س = (الطول – ١٦٤) / ٤	ص = (الوزن – ٥٠) / ٢	س ص	$س^٢$	$ص^٢$
١٦٤	٥٢	صفر	١	صفر	صفر	١
١٥٢	٤٠	– ٣	– ٥	١٥	٩	٢٥
١٨٤	٦٠	٥	٥	٢٥	٢٥	٢٥
١٦٤	٥٢	صفر	١	صفر	صفر	١
١٧٦	٦٠	٣	٥	١٥	٩	٢٥
١٥٦	٤٢	– ٢	– ٤	٨	٤	١٦
١٦٨	٥٠	١	صفر	صفر	١	صفر
١٦٤	٥٢	صفر	١	صفر	صفر	١
—	—	٤	٤	٦٣	٤٨	٩٤

من الجدول نلاحظ أن:

– العمودين (١)، (٢) يمثلان القراءات الأصلية.

– العمودين (٣)، (٤) أي س، ص يمثلان الانحرافات المبسطة.

والآن نحسب الآتي:

$$– \bar{س} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$$

$$– \bar{ص} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$$

$$– ع_س = \sqrt{\frac{٤٨}{٨} - \frac{١}{٤}} = \sqrt{\frac{٤٦}{٨}}$$

$$– ع_ص = \sqrt{\frac{٩٤}{٨} - \frac{١}{٤}} = \sqrt{\frac{٩٢}{٨}}$$

وباستخدام الصيغة رقم (١) نجد أن :

$$ر = \frac{\frac{٦٣}{٨} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}}{\sqrt{\frac{٤٦}{٨}} \sqrt{\frac{٩٢}{٨}}} = \frac{\frac{٦١}{٨}}{\frac{١}{٨} \sqrt{٤٦} \sqrt{٩٢}}$$

$$= \frac{٦١}{٤٦ \sqrt{٢}} = ٠,٩٤$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها في المثال السابق، ولكن تمتاز هذه الطريقة بسهولة الحساب.

مثال رقم (٣):

أوجد معامل الارتباط بين الظاهرتين من الجدول الآتي:

الظاهرة الأولى	٢	٣	٥	٧	٩	١٠
الظاهرة الثانية	١	٣	٧	١١	١٥	١٧

الحل

نعتبر س = الظاهرة الأولى ــ ٦ ، ص = الظاهرة الثانية ــ ٩

١ الظاهرة الأولى	٢ الظاهرة الثانية	٣ س الظاهرة الأولى ــ ٦	٤ ص الظاهرة الثانية ــ ٩	٥ س ص	٦ $س^٢$	٧ $ص^٢$
٢	١	٤ ــ	٨ ــ	٣٢	١٦	٦٤
٣	٣	٣ ــ	٦ ــ	١٨	٩	٣٦
٥	٧	١ ــ	٢ ــ	٢	١	٤
٧	١١	١	٢	٢	١	٤
٩	١٥	٣	٦	١٨	٩	٣٦
١٠	١٧	٤	٨	٣٢	١٦	٦٤
ــ	ــ	صفر	صفر	١٠٤	٥٢	٢٠٨

ـ العمودان ١ ، ٢ يمثلان القراءات الأصلية.

ـ العمودان ٣ ، ٤ أي س ، ص يمثلان انحرافان القراءات الأصلية عن عددين ثابتين هما ٦ ، ٩ على التوالي.

$$\bar{س} = \text{صفر} \quad ، \quad \bar{ص} = \text{صفر}$$

$$ع_س = \sqrt{\frac{٥٢}{٦}} \quad ، \quad ع_ص = \sqrt{\frac{٢٠٨}{٦}}$$

وباستخدام الصيغة رقم (١) نجد أن :

$$ر = \frac{\frac{١٠٤}{٦}}{\sqrt{\frac{٥٢}{٦}}\sqrt{\frac{٢٠٨}{٦}}} = \frac{١٠٤}{\sqrt{٥٢}\ \sqrt{٢٠٨}}$$

$$= \frac{١٠٤}{٢ \times ٥٢} = \frac{١٠٤}{١٠٤}$$

$$= ١$$

أي أن الارتباط بين الظاهرتين ارتباط طردي وتام، بمعنى أن جميع هذه النقط تقع على خط مستقيم، أي أن هناك علاقة رياضية بين المتغيرين.

ملاحظة هامة:

نلاحظ في هذا المثال أن العمليات الحسابية كانت سهلة و بسيطة جداً وذلك لأن الأوساط الحسابية، س، ص تساوى صفر، وذلك يرجع إلى أن العددين الثابتين ٦، ٩ هما الوسطين الحسابيين للقراءات الأصلية.

٢ ـ الارتباط بين الرتب:

يبين العمودان الأول والثاني من الجدول الآتي الدخل الشهري والاستهلاك بالريال لمجموعة من العمال:

١	٢	٣	٤	٥	٦
الدخل	الاستهلاك	رتب الدخل	رتب الاستهلاك	ف	ف٢
٤٦٥	٣٦٧	٢	١	١	١
٦٨٢	٤٩٥	٤	٤	صفر	صفر
٣٩٦	٣٧٣	١	٣	٢−	٤
٨٣٧	٦١٢	٦	٥	١	١
٧٨٤	٦٨٧	٥	٧	٢−	٤
٩٢٢	٧٦٤	٨	٨	صفر	صفر
٨٥٠	٦٢١	٧	٦	١	١
٤٨٢	٣٧٠	٣	٢	١	١
				Σ	١٢

فإذا أردنا إيجاد معامل الارتباط بين الدخل والاستهلاك باستخدام الصيغة رقم (١) فسوف تكون الحسابات صعبة ومعقدة إلى حد ما وذلك لأن عملية طرح عدد ثابت من الدخل أو الاستهلاك لن تبسط القراءات كثيراً بل ستظل مكونة من رقمين أو ثلاثة.

فإذا كان المطلوب هو الحصول على قيمة تقريبية لمعامل الارتباط بين هذين المتغيرين، فيمكننا إجراء ذلك بطريقة بسيطة وسريعة وذلك عن طريق دراسة الارتباط بين رتب القراءات إذا ما رتبت ترتيباً تصاعدياً (أو تنازلياً). ففي قراءات الدخل نعطي أصغر قراءة الرتبة ١ والقراءة التي تليها الرتبة ٢ وهكذا. ونكرر نفس العملية بالنسبة للاستهلاك، ونلاحظ أن الارتباط بين الرتب سوف يتمشى مع الارتباط بين القراءات الأصلية، وذلك لأنه في حالة الارتباط الطردي القوي نجد أن قيم س الكبيرة تصحبها قيم كبيرة للمتغير ص الأمر الذي ينتج عنه رتبتان كبيرتان لهذين المتغيرين، وبذا تكون قيمة معامل الارتباط بين الرتب كبيرة. وبالمثل نجد أنه في حالة الارتباط العكسي القوى سوف يكون الارتباط بين الرتب قوياً وعكسياً.

ويبين العمودان الثالث والرابع من الجدول السابق رتب الدخل والاستهلاك على التوالي. ونلاحظ أن قيم كل من المتغيرين الجديدين «أي الرتب» هي عبارة عن الأعداد الطبيعية من ١ إلى ٨ مرتبة في ترتيب معين، ومن الممكن إثبات أنه إذا كانت القراءات عبارة عن الأعداد الطبيعية من ١ إلى ن فإن معامل الارتباط (العلاقة رقم ١) تصبح:

$$ر = ١ - \frac{٦ \Sigma ف^{٢}}{ن(ن^{٢} - ١)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢)$$

حيث ف هي الفروق بين رتب س ، ص .

ومن الطبيعي سوف يكون هناك اختلاف بين قيمتي معامل الارتباط للقراءات الأصلية ومعامل الارتباط للرتب ، والسبب في ذلك يرجع إلى أننا استعضنا عن القراءات الأصلية برتبها وفي ذلك بعض التقريب .

ومن العلاقة رقم (٢) نلاحظ أنه لحساب معامل الإرتباط بين الرتب يلزمنا إنشاء عمودين في جدول الحساب أحدهما الفروق (ف) بين رتب س ورتب ص والآخر لمربعات هذه الفروق (ف٢) . وبعد ذلك نوجد مجموع العمود الأخير أي $\sum$ ف٢ . وبالتعويض في القانون رقم (٢) نجد أن :

$$ر = ١ - \frac{٦ \times ١٢}{٨ (٦٤ - ١)} = ١ - \frac{٧٢}{٨ \times ٦٣}$$

$$= ١ - ٠,١٤٣ = ٠,٨٦$$

مثال رقم (٤) :

أوجد بطريقة الرتب معامل الإرتباط بين الطول والوزن في المثال رقم (١) .

الحل

(أ) : نكون الجدول الآتي :

س (الطول)	ص (الوزن)	رتب س	رتب ص	ف	ف٢
١٦٤	٥٢	٤	٥	– ١	١
١٥٢	٤٠	١	١	صفر	صفر
١٨٤	٦٠	٨	٧,٥	٠,٥	٠,٢٥
١٦٤	٥٢	٤	٥	– ١	١
١٧٦	٦٠	٧	٧,٥	– ٠,٥	٠,٢٥
١٥٦	٤٢	٢	٢	صفر	صفر
١٦٨	٥٠	٦	٣	٣	٩
١٦٤	٥٢	٤	٥	– ١	١
				$\sum$	١٢,٥

ونلاحظ أنه عند ترتيب البيانات أن هناك قراءات لها نفس الترتيب: فعند ترتيب قراءات الطول نجد أن القراءتين ١٥٢، ١٥٦ تأخذان الرتبتان ١، ٢ على التوالي، يتلو ذلك مباشرة ثلاثة قراءات متساوية وهي ١٦٤، ولأعطاء هذه القيم رتباً نلاحظ أن رتبهم يجب أن تكون متساوية ولذا نعطيهم رتبة واحدة هي عبارة عن الوسط الحسابي للرتب التي كانوا سيأخذونها لو أن قيمهم كانت متتالية غير متساوية أي أن رتبة كل منهم تساوي $\frac{٣ + ٤ + ٥}{٣} = ٤$ يتلو ذلك القيمة ١٦٨ فتأخذ الرتبة ٦ والقيمة ١٧٦ الرتبة ٧ والقيمة ١٨٤ الرتبة ٨، ونكرر نفس العملية بالنسبة لقراءات الوزن.

(ب) نطبق القانون رقم (٢) فنحصل على قيمة ارتباط الرتب

$$ر = ١ - \frac{٦ \times ١٢,٥}{٨ (٦٤ - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٧٥}{٨ \times ٦٣}$$

$$= ١ - \frac{٧٥}{٥٠٤}$$

$$= ١ - ٠,١٤٨$$

$$= ٠,٨٥$$

ونلاحظ أن هناك فرقاً بين قيمة معامل الإرتباط بين القراءات الأصلية وهو ٩٤ر٠ وقيمة معامل الإرتباط بين الرتب وهو ٨٥ر٠ وذلك راجع إلى استبدال القراءات الأصلية برتبها.

ثانيا : خط الانحدار

تكلمنا في الجزء الأول من هذا الباب عن الإرتباط المستقيم ومعناه وكيفية قياسه في الحالات المختلفة . وذكرنا أن مقاييس الارتباط تمكننا من معرفة درجة العلاقة بين ظاهرتين أو متغيرين . . و بينا أنه إذا كان الإرتباط تاماً فإن قيم الظاهرتين تقع كلها على خط مستقيم في شكل الإنتشار وإذا كان الإرتباط ضعيفاً فإن هذه القيم تكون مبعثرة بحيث لايوجد رابط بينها . وكلما كان الإرتباط قو ياً كلما انحدرت أو قربت قيم الظاهرتين من خط مستقيم يمثل العلاقة بينهما و يسمى هذا المستقيم «بخط الانحدار» و يفيدنا خط الانحدار هذا في عملية التنبؤ، لأن المفهوم عادة من وجود علاقة أو ارتباط بين متغيرين أننا إذا علمنا قيمة أحدهما أمكننا عن طريق معلوماتنا عن خط الانحدار التنبؤ ولو بالتقريب بقيمة المتغير الثاني .

و يهمنا الآن إيجاد معادلة خط الانحدار الذي يمثل العلاقة الرياضية بين المتغيرين بناء على عدد (ن) من قيم الظاهرتين ولتكن (س$_١$ ، ص$_١$)، (س$_٢$ ، ص$_٢$). . . . . . ، (س$_ن$ ، ص$_ن$) حيث س تمثل قراءات الظاهرة الأولى ، ص تمثل قراءات الظاهرة الثانية . فإذا أخذنا محورين متعامدين يمثل أحدهما قيم أحد المتغيرين ويمثل الآخر قيم المتغير الآخر ورصدنا على الشكل القيم السابقة للظاهرتين فإننا نحصل على (ن) نقطة في شكل الانتشار، وتصبح المشكلة هي إيجاد معادلة أحسن خط مستقيم يوفق بين هذه النقط جميعاً .

وهذا الخط المستقيم يمكن رسمه باليد بحيث يمر بأكبر عدد ممكن من النقط ، إلا أن هذه الطريقة علاوة على عدم دقتها تختلف من شخص لآخر، ولهذا فمن الأفضل الحصول عليه بطريقة جبرية تسمى «طريقة المربعات الصغرى لتوفيق خطوط الانحدار» .

طريقة المربعات الصغرى:

تستخدم هذه الطريقة لتوفيق خط مستقيم (أو منحنى) لمجموعة من النقط بحيث يكون مجموع مربعات انحرافات النقط عن هذا الخط أصغر ما يمكن. ومن الواضح أن الخط الذي نوفقه لايمر بالنقط جميعها (إلا في حالة خاصة عندما يكون الإرتباط تاماً) وعلى ذلك فتكون هناك بعض النقط التي تنحرف عنه .

وتتميز طريقة المربعات الصغرى بأنها تعطينا خطاً يكون مجموع مربعات انحرافات النقط عنه أصغر ما يمكن .

والآن نفرض أننا نريد توفيق خط مستقيم لمجموعة القيم (س$_١$ ، ص$_١$)، (س$_٢$ ،ص$_٢$) ، (س$_٣$ ،ص$_٣$). . . . . . ، (س$_ن$ ، ص$_ن$) والمبينة في شكل الانتشار (شكل ١) .

ونفرض كذلك أن أحسن خط مستقيم هو

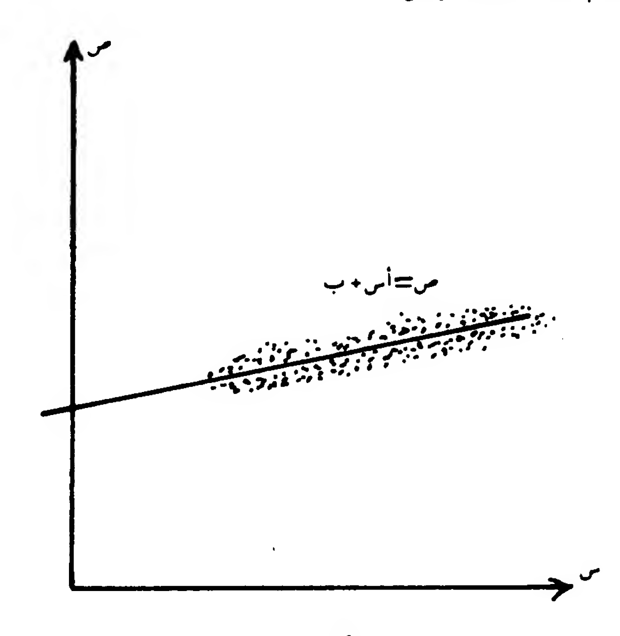
ص = أس + ب . . . . (٣) .

حيث : أ : ميل المستقيم (معامل انحدار ص/س)

ب : كمية ثابتة هي طول الجزء الذي يقطعه المستقيم من المحور الرأسي .

س : متغير مستقل ، ص : متغير تابع .

و بذلك تصبح المشكلة الآن هي تحديد قيمة أ ، ب اللتان تجعلان مجموع مربعات إنحرافات النقط عن المستقيم (٣) أصغر ما يمكن.



(شكل رقم ٢)

ونحدد قيمة أ ، ب بحل المعادلتين الطبيعيتين الآتيين :

$$\sum \text{ص} = \text{أ} \sum \text{س} + \text{ن ب}$$

$$\sum \text{س ص} = \text{أ} \sum \text{س}^{2} + \text{ب} \sum \text{س}$$

و بحل هاتين المعادلتين نجد أن:

$$\text{أ} = \frac{\frac{1}{\text{ن}} \sum \text{س ص} - \overline{\text{س}}\ \overline{\text{ص}}}{\text{ع}^{2}_{\text{س}}} \qquad (٤)$$

$$\text{ب} = \overline{\text{ص}} - \text{أ}\ \overline{\text{س}} \qquad (٥)$$

مثال رقم (٥):

الجدول الآتي يبين دخل واستهلاك سبع أسر في أحد الأحياء بمدينة ما:

الدخل (بعشرات الريالات): ٣٨ ٣٢ ٤٢ ٤٨ ٤٠ ٤٤ ٥٠

الاستهلاك (بعشرات الريالات): ٢٤ ٢١ ٢٧ ٣٠ ٢٧ ٣٣ ٣٦

والمطلوب:

١ــ ايجاد خط انحدار الاستهلاك على الدخل.

٢ــ تقدير قيمة الاستهلاك عندما يكون الدخل ٦٠٠ ريال.

الحل

١ــ نفرض أن س ترمز لظاهرة الدخل، ص ترمز لظاهرة الاستهلاك والجدول الآتي يوضح طريقة العمل:

	س	ص	س ص	$س^{٢}$
	٣٨	٢٤	٩١٢	١٤٤٤
	٣٢	٢١	٦٧٢	١٠٢٤
	٤٢	٢٧	١١٣٤	١٧٦٤
	٤٨	٣٠	١٤٤٠	٢٣٠٤
	٤٠	٢٧	١٠٨٠	١٦٠٠
	٤٤	٣٣	١٤٥٢	١٩٣٦
	٥٠	٣٦	١٨٠٠	٢٥٠٠
$\sum$	٢٩٤	١٩٨	٨٤٩٠	١٢٥٧٢

$$\bar{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}} = \frac{٢٩٤}{٧} = ٤٢$$

$$\bar{\text{ص}} = \frac{\sum \text{ص}}{\text{ن}} = \frac{١٩٨}{٧} = ٢٨,٢٩$$

$$\text{أ} = \frac{\frac{١}{\text{ن}} \sum \text{س ص} - \bar{\text{س}}\,\bar{\text{ص}}}{\text{ع}^{٢}_{\text{س}}} \qquad \text{حيث } \text{ع}^{٢}_{\text{س}} = \frac{\sum \text{س}^{٢}}{\text{ن}} - \bar{\text{س}}^{٢}$$

$$= \frac{\frac{٨٤٩٠}{٧} - ٤٢ \left(\frac{١٩٨}{٧} \right)}{\frac{١٢٠٧٢}{٧} - (٤٢)^{٢}} = \frac{٨٧}{١١٢} = ٠,٧٨$$

$$\text{، ب} = \overline{\text{ص}} - \text{أ}\ \overline{\text{س}}$$

$$= \frac{١٩٨}{٧} - \frac{٨٧}{١١٢} \times ٤٢$$

$$= - \frac{٢٤٣}{٥٦} = - ٤,٣٤$$

خط انحدار الاستهلاك على الدخل يكون:

$$\text{ص} = ٠,٧٨\ \text{س} - ٤,٣٤$$

٢ ــ تقدير قيمة الاستهلاك عندما يكون الدخل ٦٠٠ ريال: بالتعويض في خط الانحدار ــ السابق إيجاده ــ بقيمة س= ٦٠ (حيث البيانات معطاة بعشرات الريالات) نحصل على قيمة ص (الاستهلاك) كما يلي:

$$\text{ص} = ٠,٧٨ \times ٦٠ - ٤,٣٤$$

$$= ٤٦,٨٠ - ٤,٣٤$$

$$= ٤٢,٤٦ \ \text{عشرات الريالات}$$

$$= ٤٢٤,٦ \ \text{ريال}$$

أي أن الاستهلاك يصل إلى ٤٢٤,٦ ريال عندما يكون الدخل ٦٠٠ ريال.

طريقة مختصرة لعملية الحساب:

نلاحظ أنه عند استخدام المعادلتين (٤ ، ٥) كانت عمليات الحساب صعبة نظرا لكبر حجم الأرقام الداخلة فيها، ويمكننا تسهيل عمليات الحساب إذا اعتبرنا أن س ، ص ترمزان إلى:

$$\text{س} = \frac{\tilde{\text{س}} - \text{د}}{\text{ل}} \quad \text{، ص} = \frac{\tilde{\text{ص}} - \text{هـ}}{\text{و}}$$

حيث $\tilde{\text{س}}$ ، $\tilde{\text{ص}}$ هما القراءات الأصلية للظاهرتين، د، هـ، ل، و أعداد ثابتة. وبعد الحصول على معادلة خط الانحدار ص= أ س+ ب نحو لها إلى علاقة بين القراءات الأصلية وذلك بالتعويض الآتي:

$$\frac{\text{ص} - \text{هـ}}{\text{و}} = \text{أ} \left(\frac{\text{س} - \text{د}}{\text{ل}} \right) + \text{ب}$$

مثال رقم (٦):

حل المثال السابق (رقم ٥) باستخدام الطريقة المختصرة.

الحل

(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	(٦)	(٧)	(٨)	(٩)
س	ص	س - ٤٠	ص - ٢٧	(س) $\frac{\text{س} - ٤٠}{٢}$	(ص) $\frac{\text{ص} - ٢٧}{٣}$	س ص	س^2	ص^2
٣٨	٢٤	− ٢	− ٣	− ١	− ١	١	١	١
٣٢	٢١	− ٨	− ٦	− ٤	− ٢	٨	١٦	٤
٤٢	٢٧	٢	صفر	١	صفر	صفر	١	صفر
٤٨	٣٠	٨	٣	٤	١	٤	١٦	١
٤٠	٢٧	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
٤٤	٣٣	٤	٦	٢	٢	٤	٤	٤
٥٠	٣٦	١٠	٩	٥	٣	١٥	٢٥	٩
—	—	—	—	٧	٣	٣٢	٦٣	١٩

نلاحظ ان:

العمودين (١)،(٢) يرمزان للقراءات الأصلية للظاهرتين.

العمودين (٣)،(٤) يرمزان لانحرافات القراءات الأصلية عن عددين ثابتين هما ٤٠ ، ٢٧ على التوالي.

العمودين (٥)،(٦) س، ص يرمزان للانحرافات المختصرة.

$$\bar{\text{س}} = \frac{٧}{٧} = ١ \text{ ، } \bar{\text{ص}} = \frac{٣}{٧}$$

$$\therefore \text{أ} = \frac{\frac{٣٢}{٧} - ١ \times \frac{٣}{٧}}{\frac{٦٣}{٧} - ٢} = \frac{٢٩}{٥٦}$$

$$\text{، ب} = \frac{٣}{٧} - \frac{٢٩}{٥٦} (١) = -\frac{٥}{٥٦}$$

ويكون خط انحدار ص على س هو :

$$ص = \frac{٢٩}{٥٦} س - \frac{٥}{٥٦}$$

وخط انحدار صـ على سـ (القراءات الأصلية) هو :

$$\frac{صـ - ٢٧}{٣} = \frac{٢٩}{٥٦} \frac{(سـ - ٤٠)}{٢} - \frac{٥}{٥٦}$$

أى :

$$صـ = ٫٧٨ سـ - ٤,٣٤$$

وهي نفس المعادلة التي حصلنا عليها بالطريقة المطولة.

ونلاحظ أن هذه الطريقة المختصرة أسهل بكثير مما يجعلها أكثر استعمالا.

ــ تقدير قيمة الاستهلاك عندما يكون الدخل ٦٠٠ ريال:

بالتعويض في خط الإنحدار ــ السابق إيجاده ــ بقيمة س = ٦٠ (حيث البيانات معطاة بعشرات الريالات) نحصل على قيمة ص (الاستهلاك) كما يلي:

$$صـ = ٫٧٨ \times ٦٠ - ٤,٣٤$$

$$= ٤٦,٨٠ - ٤,٣٤$$

$$= ٤٢,٤٦ \text{ عشرات الريالات .}$$

$$= ٤٢٤,٦ \text{ ريال}$$

أي أن الاستهلاك يصل إلى ٤٢٤٫٦ ريال عندما يكون الدخل ٦٠٠ ريال.

مثال عام رقم (١)

١ــ الجدول الآتي يبين دخل ٨ أسر ومقدار ما تنفقه من هذا الدخل.

الدخل (بعشرات الريالات)	٦٤	٥٢	٨٤	٦٤	٧٦	٥٦	٦٨	٦٤
الإنفاق (بعشرات الريالات)	٥٢	٤٠	٦٠	٥٢	٦٠	٤٢	٥٠	٥٢

والمطلوب ايجاد:

١ــ معامل الإرتباط بطريقة بيرسون.

٢ــ خط إنحدار الإنفاق على الدخل.

٣ــ قدر إنفاق الأسرة التي يبلغ دخلها ٧٠٠ ريال.

٤ــ معامل الإرتباط بطريقة الرتب.

٥ــ قارن بين النتائج التي حصلت عليها في (١)،(٤).

الحل

(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	(٦)	(٧)	(٨)	(٩)
دخل سـ	انفاق صـ	سـ − ٦٤	صـ − ٥٠	س = (سـ − ٦٤) / ٤	ص = (صـ − ٥٠) / ٢	س ص	$س^2$	$ص^2$
٦٤	٥٢	صفر	٢	صفر	١	صفر	صفر	١
٥٢	٤٠	−١٢	−١٠	−٣	−٥	١٥	٩	٢٥
٨٤	٦٠	٢٠	١٠	٥	٥	٢٥	٢٥	٢٥
٦٤	٥٢	صفر	٢	صفر	١	صفر	صفر	١
٧٦	٦٠	١٢	١٠	٣	٥	١٥	٩	٢٥
٥٦	٤٢	−٨	−٨	−٢	−٤	٨	٤	١٦
٦٨	٥٠	٤	صفر	١	صفر	صفر	١	صفر
٦٤	٥٢	صفر	٢	صفر	١	صفر	صفر	١
—	—	—	—	٤	٤	٦٣	٤٨	٩٤

ــ نلاحظ أن العمودين (١)،(٢) يمثلان القراءات الأصلية سـ، صـ، العمودين (٥)،(٦) يمثلان الانحرافات المختصرة س ص.

ــ من الجدول نجد أن: س ص

$$\bar{س} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢} \quad ، \quad \bar{ص} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$$

$$ع^2_س = \frac{٤٨}{٨} - \left(\frac{١}{٢}\right)^2 = \frac{٤٦}{٨}$$

$$ع^2_ص = \frac{٩٤}{٨} - \left(\frac{١}{٢}\right)^2 = \frac{٩٢}{٨}$$

١ــ معامل الارتباط بطريقة بيرسون:

يلاحظ أن معامل الإرتباط بين سـ، صـ هو نفسه معامل الإرتباط بين س، ص.

$$\therefore\ r = \frac{\frac{1}{ن}\sum س\,ص - \bar{س}\,\bar{ص}}{ع_س \cdot ع_ص}$$

$$= \frac{\frac{٦٣}{٨} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}}{\sqrt{\frac{٤٦}{٨}}\sqrt{\frac{١٢}{٨}}} = \frac{٦١}{\sqrt{٤٦}\sqrt{٩٢}} = \frac{٦١}{٤٦\sqrt{٢}}$$

$$= \frac{٦١\sqrt{٢}}{٩٢} = \frac{٦١ \times ١{,}٤١٤}{٩٢} = \frac{٨٦{,}٢٥٤}{٩٢} = ٠{,}٩٤$$

أي أن الإرتباط بين الدخل والإنفاق طردي وقوى .

ــ خط انحدار الانفاق صـ على الدخل سـ

(أ) نوجد أولا خط إنحدار ص على س

$$ص = أ\,س + ب$$

$$حيث\ أ = \frac{\frac{1}{ن}\sum س\,ص - \bar{س}\,\bar{ص}}{ع^{٢}_{س}} = \frac{\frac{٦٣}{٨} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}}{\frac{٤٦}{٨}} = \frac{٦١}{٤٦} = ١{,}٣٣$$

$$ب = \bar{ص} - أ\,\bar{س} = \frac{١}{٢} - \frac{٦١}{٤٦} \times \frac{١}{٢} = ٠{,}٥٠ - ٠{,}٦٦ = -٠{,}١٦$$

$$\therefore\ ص = ١{,}٣٣\ س - ٠{,}١٦$$

ــ (ب) خط انحدار الإنفاق صـ على الدخل سـ هو:

$$\frac{صـ - ٥٠}{٢} = ١{,}٣٣\ \frac{(سـ - ٦٤)}{٤} - ٠{,}١٦$$

$$\therefore\ صـ = ٠{,}٦٦\ سـ + ٧{,}١٢$$

٢ ــ انفاق الأسرة التي يبلغ دخلها ٧٠٠ ريال :

$$صـ = ٠{,}٦٦\ (٧٠) + ٧{,}١٢$$

= ٥٣,٣٢ عشرات الريالات

= ٥٣٣ ريال

٤ ــ معامل الارتباط بطريقة الرتب:

لايجاد معامل الإرتباط بطريقة الرتب تكون الجدول الآتي:

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف٢
٦٤	٥٢	٤	٥	١ـ	١
٥٢	٤٠	١	١	صفر	صفر
٨٤	٦٠	٨	٧,٥	٠,٥٠	٠.٢٥
٦٤	٥٢	٤	٥	١ـ	١
٧٦	٦٠	٧	٧,٥	٠,٥ـ	٠,٢٥
٥٦	٤٢	٢	٢	صفر	صفر
٦٨	٥٠	٦	٣	٣	٩
٦٤	٥٢	٤	٥	١ـ	١
					١٢,٥٠

∴ معامل الإرتباط بطريقة الرتب يكون $ر = ١ - \frac{٦ \sum ف^{٢}}{ن(ن^{٢} - ١)}$

$= ١ - \frac{٦ \times ١٢,٥}{٨(٦٤ - ١)}$

$= ٠,٨٥$

٥ ــ المقارنة بين النتائج (١)،(٤):

نلاحظ أن قيمة معامل الإرتباط بطريقة بيرسون [التي حصلنا عليها في (١)] تختلف عن القيمة التي حصلنا عليها بطريقة الرتب [المطلوب (٤)] كما كنا نتوقع حيث استبدلنا القراءات الأصلية برتبها.

مثال عام رقم (٢)

فيما يلي تقديرات ثمانية من الطلاب في إمتحان مادتي الرياضيات والإحصاء والمطلوب حساب معامل إرتباط الرتب بين تقديرات المادتين.

تقديرات الرياضيات	ضعيف	مقبول	ممتاز	مقبول	ضعيف	جيد جداً	جيد	مقبول
تقديرات الإحصاء	مقبول	جيد	جيد جداً	جيد	مقبول	جيد	ممتاز	ضعيف

الحل

ترتيب تقديرات مادة الرياضيات تصاعدياً ، ضعيف يليه مقبول ثم جيد و يليه جيد جداً وأخيراً ممتاز وكذلك تقديرات الإحصاء كما يتضح من الجدول الآتي :

تقديرات الرياضيات (س)	تقديرات الإحصاء (ص)	رتب س	رتب ص	ف	$ف^2$
ضعيف	مقبول	١,٥	٢,٥	١	١
مقبول	جيد	٤	٥	١	١
ممتاز	جيد جداً	٨	٧	١	١
مقبول	جيد	٤	٥	١	١
ضعيف	مقبول	١,٥	٢,٥	١	١
جيد جداً	جيد	٧	٥	٢	٤
جيد	ممتاز	٦	٨	٢	٤
مقبول	ضعيف	٤	١	٣	٩
					٢٢

نستخدم العلاقة . $ر = ١ - \frac{٦ \sum ف^٢}{ن(ن^٢ - ١)}$

$$ر = ١ - \frac{٦ \times ٢٢}{٨(٦٤ - ١)} = ١ - \frac{١٣٢}{٨ \times ٦٣}$$

$$= ١ - \frac{١٣٢}{٥٠٤} = ١ - ٠,٢٦ = ٠,٧٤$$

أي أن الارتباط طردي ومتوسط .

تمارين

(١) الجدول الآتي يبين عمر أحد النباتات بالأسابيع وطوله بالسنتيمتر:

العمر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
الطول	٥	١٣	١٦	٢٣	٣٣	٣٨	٤٠

والمطلوب إيجاد:

١ ــ معامل الارتباط بطريقة بيرسون.

٢ ــ خط انحدار الطول على العمر.

٣ ــ الطول عند عمر مقداره ٩ أسابيع.

٤ ــ معامل الارتباط بطريقة الرتب.

٥ ــ قارن بين النتائج التي حصلت عليها في (١)،(٤).

(٢) الجدول الآتي يوضح الدرجات التي حصل عليها ثمانية موظفين وسن كل منهم وذلك عقب امتحان إحدى الدورات التدريبية.

سن الموظف	٤٢	٤٥	٤٩	٥٣	٤٦	٤٥	٣٨	٣٦
الدرجة التي حصل عليها	٦٥	٧٥	٥٨	٦٥	٥٠	٦٩	٨٠	٩٠

والمطلوب حساب معامل ارتباط الرتب بين سن الموظف والدرجة التي حصل عليها في الامتحان.

(٣) الجدول الآتي يبين درجات عشرة من الطلبة في كل من مادتي الإحصاء والمحاسبة.

الرقم المسلسل للطالب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
درجات الإحصاء	٧٨	٣٦	٩٨	٢٥	٧٥	٨٢	٩٠	٦٢	٦٥	٣٩
درجات المحاسبة	٨٤	٥١	٩١	٦٠	٦٨	٦٢	٨٦	٥٨	٥٣	٤٧

والمطلوب حساب معامل الارتباط بطريقة الرتب بين درجات الطالب في مادة الإحصاء ومادة المحاسبة. ثم قارنه بمعامل الارتباط الذي تحصل عليه بطريقة بيرسون.

(٤) لدراسة العلاقة بين الدخل بعشرات الريالات، (ص) والعمر بالسنوات (س) بين عمال أحد المصانع. أخذت عينة مكونة من ٢٠ عاملاً فأعطت النتائج الآتية:

$$\text{مجـ س} = ١٠ \qquad \text{مجـ ص} = ٢٠$$
$$\text{مجـ س}^٢ = ١٤ \qquad \text{مجـ ص}^٢ = ٨٤$$
$$\text{مجـ س ص} = ٢٩{,}٢$$

والمطلوب إيجاد :

ـــ معامل الارتباط بين الدخل والعمر.

٢ــ خط انحدار الدخل على العمر.

٣ــ دخل العامل الذي يبلغ من العمر ٣٠ سنة .

(٥) لدراسة العلاقة بين العمر (ص) بالسنوات ومدة الحياة الزوجية (س) بالسنوات كانت لدينا النتائج الآتية :

$$\text{مجـ س} = ٥٠ \qquad \text{مجـ ص} = ٤٠ \qquad \text{مجـ س ص} = ٥٨٠$$
$$\text{مجـ س}^٢ = ٥٠٠ \qquad \text{مجـ ص}^٢ = ٨٠٠ \qquad \text{ن} = ١٠$$

والمطلوب حساب :

١ــ معامل الارتباط بين العمر ومدة الحياة الزوجية .

٢ــ خط انحدار العمر على مدة الحياة الزوجية .

٣ــ تقدير العمر عندما تصل مدة الحياة الزوجية ٢٠ سنة .

(٦) لدراسة العلاقة بين الدخل (ص) « بمئات الريالات» والاستهلاك (س) « بمئات الريالات» في مدينة ما، أخذت عينة من ٤٠ أسرة فأعطت النتائج الآتية :

$$\text{مجـ س} = ١٠٠ \qquad \text{مجـ ص} = ١٢٠ \qquad \text{مجـ س ص} = ٥١٦$$
$$\text{مجـ س}^٢ = ٤١٠ \qquad \text{مجـ ص}^٢ = ٧٢٠$$

والمطلوب حساب :

١ــ معامل الارتباط بين الدخل والاستهلاك .

٢ــ خط انحدار الدخل على الاستهلاك .

٣ــ قيمة الدخل عندما يبلغ الاستهلاك ٤٧٠٠ ريال .

(٧) لدراسة العلاقة بين الكمية المطلوبة (ص) والسعر (س) بعشرات الريالات كانت لدينا النتائج الآتية :

$$\text{مجـ س} = ٦٠ \qquad \text{مجـ ص} = ٧٠ \qquad \text{مجـ س ص} = ٢٧٤$$
$$\text{مجـ س}^٢ = ٤٠٦ \qquad \text{مجـ ص}^٢ = ٥٣٦ \qquad \text{ن} = ١٠$$

والمطلوب حساب:

١ــ معامل الارتباط بين الكمية المطلوبة والسعر.

٢ــ خط انحدار الكمية المطلوبة على السعر.

٣ــ الكمية المطلوبة عندما يصل السعر إلى ٧٠ ريالاً.

(٨) لدراسة العلاقة بين الدخل (س) الاستهلاك (ص) بمئات الريالات في بلد ما ما أخذت عينة من الأسر فأعطت النتائج الآتية:

الدخل (بمئات الريالات)	٥	٤	٥	٦	٩	١٠	٩	١٢	١١	٩
الاستهلاك (بمئات الريالات)	٥	٤	٥	٥	٨	٦	٨	١١	١٠	٨

والمطلوب حساب:

١ــ معامل ارتباط بيرسون بين الدخل والاستهلاك.

٢ــ معامل ارتباط سبيرمان بين الدخل والاستهلاك.

٣ــ ما سبب الاختلاف بين نتيجة (١)، (٢).

٤ــ خط انحدار الاستهلاك على الدخل.

٥ــ قيمة الاستهلاك عندما يصل الدخل إلى ٨٠٠ ريال.

الباب السادس

السلاسل الزمنية

السلاسل الزمنية

١ـ تعريف السلسلة الزمنية:

السلسلة الزمنية هي مجموعة القراءات التي تأخذها ظاهرة ما عند فترات زمنية غالباً ما تكون متساوية. وتختلف هذه الفترات حسب طبيعة الظاهرة فيمكن أن تكون يوماً أو أسبوعاً أو شهراً أو سنة. أي أن السلسلة الزمنية تحتوى على متغيرين أحدهما مستقل هو الزمن (ر) والثاني تابع وهو قيمة الظاهرة (ص). وعلى ذلك تكون ص دالة في ر ويعبر عنها رياضياً في الصورة ص=د(ر).

والأمثلة على السلاسل الزمنية كثيرة فمنها الإنتاج السنوى لمحصول القطن في إحدى البلاد وقيم المبيعات الشهرية من السلع المختلفة ودرجات الحرارة اليومية وهكذا.

وفيما يلي بعض الأمثلة:

مثال رقم (١):

الجدول الآتي يبين متوسط الإنتاج الشهري للفحم في الفترة ما بين سنة ١٩٤٨ وسنة ١٩٥٨ في بلد ما (بالمليون طن).

السنة	١٩٤٨	١٩٤٩	١٩٥٠	١٩٥١	١٩٥٢	١٩٥٣	١٩٥٤	١٩٥٥	١٩٥٦	١٩٥٧	١٩٥٨
متوسط الإنتاج الشهرى للفحم	٥٠	٣٦,٥	٤٣	٤٤,٥	٣٨,٩	٣٨,١	٣٢,٦	٣٨,٧	٤١,٧	٤١,١	٣٣,٨

مثال رقم (٢):

الجدول الآتي يبين عدد علب المياه الغازية التي باعها أحد المصانع في عدة سنوات (بالألف).

السنة	الربيع	الصيف	الخريف	الشتاء
١٩٧٤	٣٤	٤٤	٤٠	٣٠
١٩٧٥	٥٤	٦٤	٦٠	٤٢
١٩٧٦	٧٠	٩٠	٨٤	٦٤
١٩٧٧	٩٠	١١٠	١٠٤	٨٠
١٩٧٨	١١٢	١٣٠	١٢٠	١١٠
١٩٧٩	١٢٨	١٥٠	١٤٠	١٣٠

مثال رقم (٣):

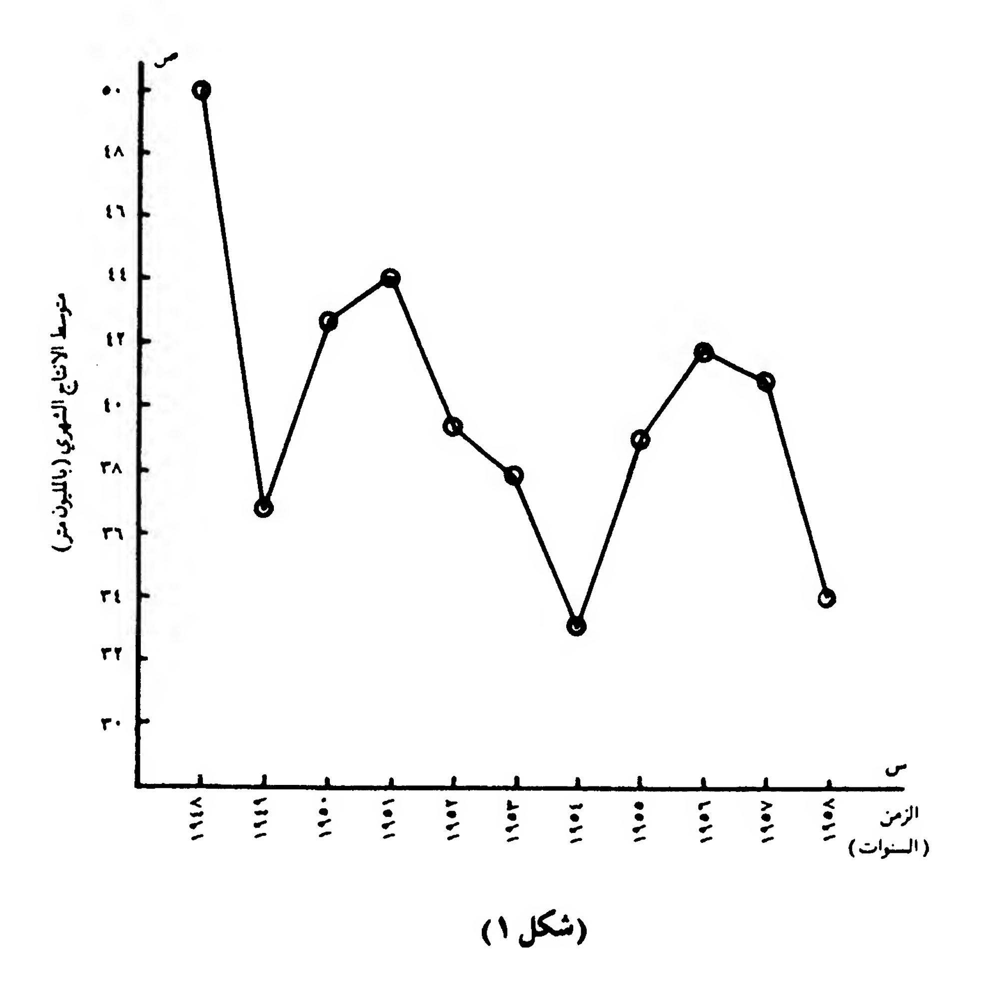
الجدول الآتي يبين الطاقة الكهربائية المستهلكة (بالمليون كيلوات = ساعة) في شوارع إحدى البلاد في الفترة بين سنة ١٩٥١، سنة ١٩٥٨.

الشهر / السنة	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
١٩٥١	٣١٨	٢٨١	٢٧٨	٢٥٠	٢٣١	٢١٦	٢٢٣	٢٤٥	٢٦٩	٣٠٢	٣٢٥	٣٤٧
١٩٥٢	٣٤٢	٣٠٩	٢٩٩	٢٦٨	٢٤٩	٢٣٦	٢٤٢	٢٦٢	٢٨٨	٣٢١	٣٤٢	٣٩٤
١٩٥٣	٣٦٧	٣٢٨	٣٢٠	٢٨٧	٢٦٩	٢٥١	٢٥٩	٢٨٤	٣٠٩	٣٤٥	٣٦٧	٣٩٤
١٩٥٤	٣٩٢	٣٤٩	٣٤٢	٣١١	٢٩٠	٢٧٣	٢٨٢	٣٠٥	٣٢٨	٣٦٤	٢٨٩	٤١٧
١٩٥٥	٤٢٠	٣٧٨	٣٧٠	٣٣٤	٣١٤	٢٩٦	٣٠٥	٣٣٠	٣٥٦	٣٩٦	٤٢٢	٤٥٢
١٩٥٦	٤٥٣	٤١٢	٣٩٨	٣٦٢	٣٤١	٢٢٢	٣٣٥	٣٥٩	٣٩٢	٤٢٧	٤٥٤	٤٨٣
١٩٥٧	٤٨٧	٤٤٠	٤٢٩	٣٩٣	٣٧٠	٣٤٧	٣٥٧	٣٨٨	٤١٥	٤٥٧	٤٩١	٥١٦
١٩٥٨	٥٢٩	٤٧٧	٤٦٣	٤٢٣	٣٩٨	٣٨٠	٣٨٩	٤١٩	٤٤٨	٤٩٣	٥٢٦	٥٦٠

٢ـ التمثيل البياني للسلسلة الزمنية:

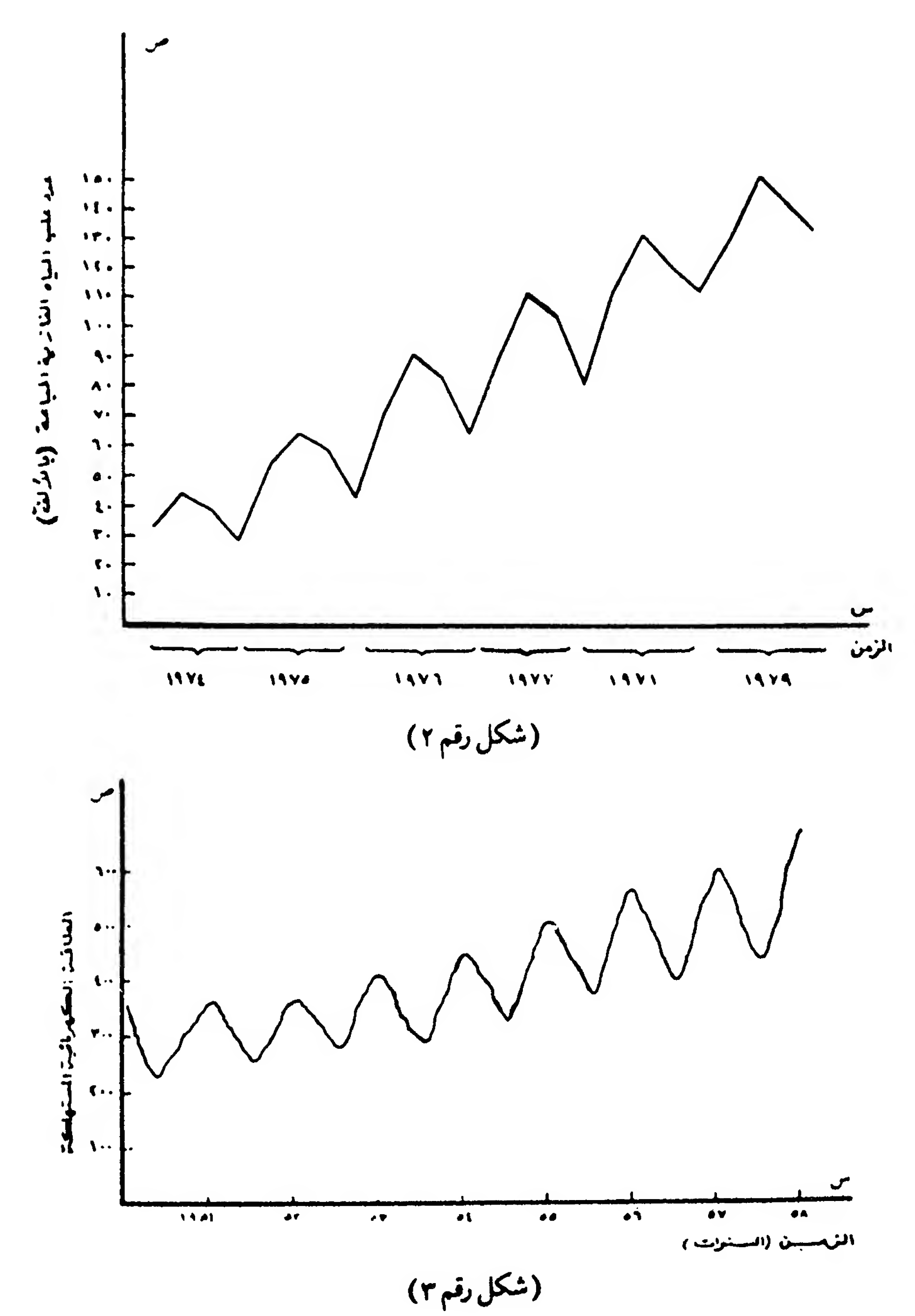
يمكن تمثيل أي سلسلة زمنية بيانياً بأخذ قيم الزمن على المحور الأفقي وقيم الظاهرة على المحور الرأسي، ثم نرصد النقط التي تمثل قيم الظاهرة عند الفترات الزمنية المختلفة، و بتوصيل هذه النقط ببعضها نحصل على شكل يطلق عليه المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية.

وتمثل الأشكال (١)،(٢)،(٣) المنحنيات التاريخية للسلاسل الزمنية المبينة في الأمثلة الثلاثة



(شكل ١)

ويمثل الشكل السابق المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية المبينة في المثال رقم (١) ونلاحظ أننا بدأنا بتقسيم المحور الرأسي ابتداء من ٣٠ حتى نستطيع أن نبين التغيرات التي تحدث في المنحنى بصورة واضحة ، إذ أنه إذا قسمنا المحور الرأسي من صفر إلى ٥٠ فإن المنحنى التاريخي للسلسلة سوف لايبرز ذبذبات السلسلة بوضوح .



(شكل رقم ٢)

(شكل رقم ٣)

و يتضح من الشكل أن المنحنى التاريخي للظاهرة له ٧ قمم تقع تقريباً في نهاية كل سنة، كما أن لها ٨ قاع تقع تقريباً في منتصف السنة.

٣ــ مكونات السلسلة الزمنية :

دراسة السلاسل الزمنية تتطلب تحليلها إلى عناصرها المختلفة لمعرفة مقدار كل منها واتجاهاتها وعلاقاتها بعضها ببعض حتى يمكن الاستفادة منها في التنبؤ بقيمة الظاهرة في المستقبل .

ولقد استخدمت عدة نماذج لوصف السلاسل الزمنية ، ولعل أهم وأقدم نموذج هو الذي يبين أن السلسلة الزمنية تتكون من العناصر الآتية :

(أ) الاتجاه العام .

(ب) التغيرات الموسمية .

(جـ) التغيرات الدورية .

(د) التغيرات العرضية أو الفجائية .

وفيما يلي شرح موجز لكل من هذه المكونات (العناصر) :

(أ) الاتجاه العام :

هو الاتجاه الذي تأخذه السلسلة الزمنية خلال فترة طويلة من الزمن . فبالرغم من أنه يمكن أن تكون هناك تذبذبات في المنحنى التاريخي للظاهرة ، إلا أنه على المدى الطويل نلاحظ أن هناك اتجاهاً عاماً يأخذه هذا المنحنى إما إلى الزيادة أو النقصان أو الزيادة ثم النقصان .

ومن الأمثلة على الاتجاه العام نحو الزيادة ، السلاسل الخاصة بعدد الركاب الذين يستخدمون الطائرات . أو عدد أجهزة التلفزيون المباعة سنوياً . ومن الأمثلة على الاتجاه العام نحو النقصان عدد الذين يستخدمون القطارات داخل أمريكا . والكمية المستهلكة من المياه الغازية سنوياً تعتبر كمثال للاتجاه العام نحو الزيادة ثم النقصان.

وعلى ذلك فالاتجاه العام هو التغير التدريجي الذي يظهر أثره واضحا بعد تراكمه مدة طويلة و يكون ضئيلا من سنة لأخرى أو من شهر لآخر إلا أنه يظهر للباحث إذا لم تخفه العناصر الأخرى للسلسلة .

(ب) التغيرات الموسمية :

وتطلق على التغيرات التي تتكرر بانتظام خلال فترة زمنية لا تتعدى السنة . كأن تكون يومية أو أسبوعية أو شهرية أو سنوية . فحركة المرور تأخذ غالبا شكلا موسميا كل يوم إذ تزداد وتتركز يومياً خلال فترتي الصباح والظهيرة . وكذلك المبيعات تزداد وتتركز سنوياً خلال شهر رمضان من كل عام . والمبيعات من المواد الاستهلاكية تأخذ شكلا موسمياً هي الأخرى فنجد أنها تزداد كل يوم جمعة .

(جـ) التغيرات الدورية :

تطلق على التغيرات طويلة المدى التي تحدث حول الاتجاه العام الممثل للظاهرة وتتكرر في فترات زمنية أكثر من سنة لذلك فهي تختلف عن التغيرات الموسمية التي تحدث بانتظام وخلال

فترات زمنية أقل من سنة . وطبيعة التغيرات الدورية أنها تغيرات غير عادية بمعنى أنها ربما قد تتبع أو لا تتبع نفس النظام بعد فترات متساوية من الزمن . وأشهر مثال على هذه التغيرات هو ما يسمى بدورات الأعمال والتي تمثل فترات الرخاء والكساد لاقتصاد ما .

(د) التغيرات العرضية أو الفجائية :

هي تغيرات طارئة تحدث نتيجة حوادث فجائية غالباً لا تكون في الحسبان كالحروب والفيضانات والأوبئة . ولذلك فهي تؤثر على الاتجاه العام للسلسلة الزمنية إما زيادة أو نقصاً . فمثلا إذا كنا بصدد دراسة الاتجاه العام للعمالة خلال فترة زمنية وحدث في هذه الفترة حادث مفاجيء كالفيضان مثلا فإننا نلاحظ أن الاتجاه العام للظاهرة يزداد خلال هذه الفترة بسبب تأجير عدد كبير من العمال للعمل في المناطق التي أصابها الفيضان . وهذه التغيرات لا تستمر طويلا لذلك يطلق عليها أحياناً التغيرات قصيرة الأجل .

٤ ــ تحليل السلاسل الزمنية :

المقصود من تحليل السلاسل الزمنية هو قياس التغيرات التي تؤثر في الظاهرة وخاصة الاتجاه العام والتغيرات الموسمية والتغيرات الدورية لمعرفة مقدار واتجاه وطبيعة كل منها وعزل هذه الأنواع المختلفة من التغيرات والتنبؤ بقيمة الظاهرة في المستقبل .

نماذج السلسلة الزمنية :

يوجد عدة نماذج للسلسلة الزمنية تعبر عن علاقة العناصر الأربعة المكونة لها مع بعضها البعض ، نذكر منها ما يسمى بنموذج الضرب . وهذا النموذج يفترض أن قيمة الظاهرة عند لحظة زمنية معينة عبارة عن حاصل ضرب العناصر الأربعة المكونة لها عند هذه اللحظة . و يعبر عن ذلك رياضيا بالصيغة الآتية :

$$ص_ر = ت_ر \times م_ر \times د_ر \times ع_ر \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١)$$

حيث : $ص_ر$ = قيمة الظاهرة عند اللحظة الزمنية ر .

$ت_ر$ = القيمة الاتجاهية للظاهرة عند اللحظة الزمنية ر .

$م_ر$ = التغير الموسمى للظاهرة عند اللحظة الزمنية ر .

$د_ر$ = التغير الدورى للظاهرة عند اللحظة الزمنية ر .

$ع_ر$ = التغير العرضى للظاهرة عند اللحظة الزمنية ر .

و يلاحظ أن الاتجاه العام هو الوحيد الذي يظهر بوحدات الظاهرة بينما تظهر قيم باقي التغيرات في صورة نسبية . وسوف نركز دراستنا الآن على طرق تعيين هذه المكونات .

٥- طرق تعيين الاتجاه العام:

يعتبر الاتجاه العام من أهم عناصر السلسلة الزمنية في التنبؤ بقيمة الظاهرة باستخدام بيانات السلسلة الزمنية الممثلة لها. و يتلخص تعيين الاتجاه العام في إيجاد خط أو منحنى مناسب يصف حركة السلسلة خلال فترة من الزمن.

ويمكن تعيين الاتجاه العام بعدة طرق نذكر أهمها:

- طريقة المتوسطات المتحركة.
- طريقة المربعات الصغرى.

ولكننا سنركز دراستنا على طريقة المربعات الصغرى وذلك لأنها تعتبر من أدق الطرق الإحصائية في توفيق المنحنيات.

طريقة المربعات الصغرى:

بعد الحصول على المنحنى التاريخي للظاهرة. نلاحظ أن هناك اتجاهاً عاماً يأخذ شكل منحنى ويمكن الحصول على معادلة هذا المنحنى بطريقة المربعات الصغرى والتي تنص على أن أحسن منحنى هو الذي تكون مجموع مربعات انحرافات القراءات عنه أصغر ما يمكن، وهناك عدة احتمالات للمنحنى نسردها فيما يلي:

(أ) إذا كان المنحنى على صورة خط مستقيم فتكون معادلته على الصورة ص= أس + ب

حيث: ص: قيم الظاهرة

س: الزمن

أ، ب مقادير ثابتة تتعين من المعادلات الطبيعية التي سبق ذكرها في باب الانحدار وهي:

$$\sum ص = أ \sum س + ن ب$$

$$\sum س ص = أ \sum س^2 + ب \sum س$$

و بإيجاد قيمة أ، ب تتحدد معادلة أحسن خط مستقيم يمثل الظاهرة. ومن هذه المعادلة نحصل على القيم الاتجاهية للظاهرة في السنوات المختلفة.

(ب) إذا كان المنحنى في صورة منحنى من الدرجة الثانية (قطع مكافىء) فتكون معادلته على الصورة:

$$ص = أ س^2 + ب س + ﺣ$$

حيث أ ، ب ، ﺣ مقادير ثابتة.

و بطريقة مماثلة لتلك التي استخدمت في اشتقاق المعادلات الطبيعية للخط المستقيم يمكن إثبات أن المعادلات الطبيعية في هذه الحالة هي:

$$\sum ص = أ \sum س^2 + ب \sum س + ن حـ$$

$$\sum س ص = أ \sum س^3 + ب \sum س^2 + حـ \sum س$$

$$\sum س^2 ص = أ \sum س^4 + ب \sum س^3 + حـ \sum س^2$$

و بحل هذه المعادلات نحصل على قيم أ، ب، حـ و بذلك تتحدد معادلة أحسن منحنى يمثل الظاهرة. ومن هذه المعادلة نحصل على القيم الاتجاهية للظاهرة في السنوات المختلفة.

(حـ) إذا كان المنحنى يأخذ الصورة الأسية الآتية:

$ص = أ . ب^{س}$

و بأخذ لوغاريتم الطرفين تصبح المعادلة على الصورة:

لوص = لوأ + س لوب وهذه معادلة خط مستقيم في س، لوص: و بوضع لوص = صَ، لوأ = حـ، لوب = م

تصبح المعادلة صَ = م س + حـ

وتكون المعادلات الطبيعية لها هي:

$$\sum صَ = م \sum س + ن حـ$$

$$\sum س صَ = م \sum س^2 + حـ \sum س$$

و بحل هاتين المعادلتين نحصل على قيم م، حـ ومنهما نوجد قيم أ، ب و بالتالي نحصل على معادلة المنحنى الأسى الذي يعطى القيم الاتجاهية للظاهرة في السنوات المختلفة.

ولتبسيط العمليات الحسابية في إيجاد قيم الثوابت أ، ب، حـ، م، ننقل الأصل بالنسبة للزمن إلى قيمة من القيم الوسطى بحيث يكون مجموع قيم س الجديدة يساوى صفراً.

فإذا كان عدد القيم فردياً نجعل الزمن يساوى صفراً عند القيمة الوسطى. فتكون الفترات التالية لها هي ١، ٢، ٣..إلخ والفترات السابقة لها هي ــ١، ــ٢، ــ٣..إلخ و بذلك يكون $\sum$ س = صفر.

وإذا كان عدد القيم زوجياً نأخذ الصفر بالنسبة للزمن بين القيمتين الوسطيين، فإذا اعتبرنا أن وحدة الزمن تساوي نصف الفترة فإن قيم الزمن في النصف الأعلى من السلسلة هي: ــ١، ــ٣، ــ٥..إلخ. وقيم الزمن في النصف الأسفل من السلسلة هي: ١، ٣، ٥..إلخ. و بذلك يكون $\sum$ س = صفر أيضا.

والأمثلة الآتية توضح كيفية حساب معادلة الاتجاه العام وكذلك القيم الاتجاهية للظاهرة، في حالة ما إذا كان عدد القيم فردياً وزوجياً . وذلك في حالة ما إذا كان المنحنى يمكن تمثيله أو توفيقه بخط مستقيم .

مثال رقم (٤):

احسب معادلة الاتجاه العام للظاهرة الموضحة في المثال رقم (١)، ثم احسب القيم الاتجاهية للظاهرة في المثال المذكور.

الحل

ـ نلاحظ من المنحنى التاريخي للظاهرة أن الاتجاه العام يأخذ شكل خط مستقيم .

ـ نكون الجدول الآتي :

سنة	س	قيم الظاهرة (ص)	$س^2$	س ص
١٩٤٨	٥ —	٥٠	٢٥	٢٥٠,٠ —
١٩٤٩	٤ —	٣٦.٥	١٦	١٤٦,٠ —
١٩٥٠	٣ —	٤٣	٩	١٢٩,٠ —
١٩٥١	٢ —	٤٤,٥	٤	٨٩,٠ —
١٩٥٢	١ —	٣٨,٩	١	٣٨,٩ —
١٩٥٣	صفر	٣٨,١	صفر	صفر
١٩٥٤	١	٣٢,٦	١	٣٢,٦
١٩٥٥	٢	٣٨,٧	٤	٧٧.٤
١٩٥٦	٣	٤١,٧	٩	١٢٥.١
١٩٥٧	٤	٤١,١	١٦	١٦٤,٤
١٩٥٨	٥	٣٣,٨	٢٥	١٦٩.٠
Σ	صفر	٤٣٨,٩	١١٠	٨٤.٤ —

وحيث أن Σ ص = ا Σ س + ن ب

$\therefore$ ٤٣٨,٩ = ا × صفر + ١١ ب

$$\therefore \text{ب} = \frac{٤٣٨,٩}{١١} = ٣٩,٩$$

$$\text{،} \quad \sum \text{س ص} = \text{أ} \sum \text{س}^{٢} + \text{ب} \sum \text{س}$$

$$\therefore -٨٤.٤ = ١١٠ \text{ أ} + \text{ب} \times \text{صفر}$$

$$\therefore \text{أ} = \frac{-٨٤.٤}{١١٠} = -٠.٧٦٧$$

وبذلك تكون معادلة الاتجاه العام هي:

ص = -٠٫٧٦٧ س + ٣٩٫٩

حيث: نقطة الأصل هي سنة ١٩٥٣، ووحدة الزمن سنة.

وبالتعويض بقيم س = -٥، -٤، -٣، -٢، -١، صفر، ١، ٢، ٣، ٤، ٥ في معادلة الاتجاه العام السابقة. نحصل على القيم الاتجاهية للظاهرة كما يتضح من الجدول الآتي:

السنة	القيم الاتجاهية للظاهرة	السنة	القيم الاتجاهية للظاهرة
١٩٤٨	٤٣٫٧	١٩٥٤	٣٩٫١
١٩٤٩	٤٣٫٠	١٩٥٥	٣٨٫٤
١٩٥٠	٤٢٫٢	١٩٥٦	٣٧٫٦
١٩٥١	٤١٫٤	١٩٥٧	٣٦٫٨
١٩٥٢	٤٠٫٧	١٩٥٨	٣٦٫١
١٩٥٣	٣٩٫٩		

مثال رقم (٥):

احسب معادلة الاتجاه العام للظاهرة الموضحة في المثال رقم (٢)، ثم إحسب القيم الاتجاهية للظاهرة في المثال المذكور.

الحل

- نلاحظ من المنحنى التاريخي للظاهرة أن الاتجاه العام يأخذ شكل خط مستقيم.
- تكون الجدول الآتي:

السنة والفترة	س	قيم الظاهرة ص	س^٢	س ص
الربيع ١٩٧٤	− ٢٣	٣٤	٥٢٩	− ٧٨٢
الصيف	− ٢١	٤٤	٤٤١	− ٩٢٤
الخريف	− ١٩	٤٠	٣٦١	− ٧٦٠
الشتاء	− ١٧	٣٠	٢٨٩	− ٥١٠
الربيع ١٩٧٥	− ١٥	٥٤	٢٢٥	− ٨١٠
الصيف	− ١٣	٦٤	١٦٩	− ٨٣٢
الخريف	− ١١	٦٠	١٢١	− ٦٦٠
الشتاء	− ٩	٤٢	٨١	− ٣٧٨
الربيع ١٩٧٦	− ٧	٧٠	٤٩	− ٤٩٠
الصيف	− ٥	٩٠	٢٥	− ٤٥٠
الخريف	− ٣	٨٤	٩	− ٢٥٢
الشتاء	− ١	٦٤	١	− ٦٤
الربيع ١٩٧٧	١	٩٠	١	٩٠
الصيف	٣	١١٠	٩	٣٣٠
الخريف	٥	١٠٤	٢٥	٥٢٠
الشتاء	٧	٨٠	٤٩	٥٦٠
الربيع ١٩٧٨	٩	١١٢	٨١	١٠٠٨
الصيف	١١	١٣٠	١٢١	١٤٣٠
الخريف	١٣	١٢٠	١٦٩	١٥٦٠
الشتاء	١٥	١١٠	٢٢٥	١٦٥٠
الربيع ١٩٧٩	١٧	١٢٨	٢٨٩	٢١٧٦
الصيف	١٩	١٥٠	٣٦١	٢٨٥٠
الخريف	٢١	١٤٠	٤٤١	٢٩٤٠
الشتاء	٢٣	١٣٠	٥٢٩	٢٩٩٠
Σ	صفر	٢٠٨٠	٤٦٠٠	١١١٩٢

$\sum \text{ص} = \text{أ} \sum \text{س} + \text{ن ب}$ ∴ $٢٠٨٠ = ٢٤ \text{ب}$ ومنها ب = $\frac{٢٠٨٠}{٢٤} = ٨٦,٧$

$\sum \text{س ص} = \text{أ} \sum \text{س}^2 + \text{ب} \sum \text{س}$ ∴ $١١١٩٢ = ٤٦٠٠ \text{أ}$

ومنها أ = $\frac{١١١٩٢}{٤٦٠٠} = ٢,٤٣$

وبذلك تكون معادلة الاتجاه العام هي:

ص = ٢,٤٣ س + ٨٦,٧

حيث: نقطة الأصل: منتصف الفترة بين الشتاء ١٩٧٦ والربيع ١٩٧٧

وحدة الزمن: نصف فترة (حيث الفترة $\frac{١}{٤}$ سنة).

وبالتعويض بقيم س = ١، ٣، ٥، ...، ٢١، ٢٣، ١، ٣، ٥، ...، ٢١، ٢٣ في معادلة الاتجاه العام السابق الحصول عليها نحصل على القيم الاتجاهية للظاهرة كما في الجدول الآتي:

الفصل ← / السنة ↓	الربيع	الصيف	الخريف	الشتاء
١٩٧٤	٣٠,٨١	٣٥,٦٧	٤٠,٥٣	٤٥,٣٩
١٩٧٥	٥٠,٢٥	٥٥,١١	٥٩,٩٧	٦٤,٨٣
١٩٧٦	٦٩,٦٩	٧٤,٥٥	٧٩,٤١	٨٤,٢٧
١٩٧٧	٨٩,١٣	٩٣,٩٩	٩٨,٨٥	١٠٣,٧١
١٩٧٨	١٠٨,٥٧	١١٣,٤٣	١١٨,٢٩	١٢٣,١٥
١٩٧٩	١٢٨,٠١	١٣٢,٨٧	١٣٧,٧٣	١٤٢,٥٩

مثال رقم (٦):

الجدول الآتي يوضح قيمة الواردات في بلد ما في السنوات ١٩٥٣ – ١٩٦٢، والمطلوب حساب معادلة الاتجاه العام للظاهرة باستخدام طريقة المربعات الصغرى، ثم احسب القيم الاتجاهية الظاهرة.

السنة	٥٣	٥٤	٥٥	٥٦	٥٧	٥٨	٥٩	٦٠	٦١	٦٢
قيمة الواردات	٣٨	٤٠	٤١	٤٥	٤٦	٤٨	٥٠	٥٢	٥٣	٥٥

الحل

– برسم المنحنى التاريخي للظاهرة نجد أن الاتجاه العام يكون على شكل مستقيم.

– نكون الجدول الآتي:

السنة	س	قيم الظاهرة ص	س²	س ص
١٩٥٣	-٩	٣٨	٨١	-٣٤٢
١٩٥٤	-٧	٤٠	٤٩	-٢٨٠
١٩٥٥	-٥	٤١	٢٥	-٢٠٥
١٩٥٦	-٣	٤٥	٩	-١٣٥
١٩٥٧	-١	٤٦	١	-٤٦
١٩٥٨	١	٤٨	١	٤٨
١٩٥٩	٣	٥٠	٩	١٥٠
١٩٦٠	٥	٥٢	٢٥	٢٦٠
١٩٦١	٧	٥٣	٤٩	٣٧١
١٩٦٢	٩	٥٥	٨١	٤٩٥
Σ	صفر	٤٦٨	٣٣٠	٣١٦

Σ ص = أ Σ س + ن ب

∴ ٤٦٨ = أ × صفر + ١٠ ب

∴ ب = ٤٦٨ / ١٠ = ٤٦٫٨

، Σ س ص = أ Σ س² + ب Σ س

٣١٦ = ٣٣٠ أ + ب × صفر

∴ أ = ٣١٦ / ٣٢٠ = ٠٫٩٦

وبذلك تكون معادلة الاتجاه العام هي:

ص = ٫٩٦ س + ٤٦٫٨

حيث: نقطة الأصل هي منتصف عام ١٩٥٧، ووحدة الزمن نصف سنة.

وبالتعويض بقيم س = -٩، -٧، -٥، -٣، -١، ١، ٣، ٥، ٧، ٩ في معادلة الاتجاه العام السابق الحصول عليها، نحصل على القيم الاتجاهية للظاهرة. كما يتضح من الجدول الآتي:

السنة	القيم الاتجاهية للظاهرة	السنة	القيم الاتجاهية للظاهرة
١٩٥٣	٣٨,١٦	١٩٥٨	٤٧,٧٦
١٩٥٤	٤٠,٠٨	١٩٥٩	٤٩,٦٨
١٩٥٥	٤٢,٠٠	١٩٦٠	٥١,٦٠
١٩٥٦	٤٣,٩٢	١٩٦١	٥٣,٥٢
١٩٥٧	٤٥,٨٤	١٩٦٢	٥٥,٤٤

٦ــ استبعاد أثر الاتجاه العام:

بعد تعيين الاتجاه العام للظاهرة يمكن استبعاد أثره. وذلك بالحصول على نسب القيم الأصلية إلى القيم الاتجاهية للظاهرة.

والمثال الآتي يوضح كيفية استبعاد أثر الاتجاه العام من السلسلة الخاصة بمتوسط الإنتاج الشهري للفحم في الفترة من ١٩٤٨ حتى ١٩٥٨ في بلد ما، مثال رقم (١).

السنة	القيم الفعلية (ص)	القيم الاتجاهية (ص‘)	القيم النسبية ص‘/ص × ١٠٠
١٩٤٨	٥٠	٤٣,٧	١١٤,٤
١٩٤٩	٣٦.٥	٤٣,٠	٨٤,٩
١٩٥٠	٤٣	٤٢,٢	١٠١,٠
١٩٥١	٤٤,٥	٤١,٤	١٠٧,٥
١٩٥٢	٣٨,٩	٤٠,٧	٩٥,٦
١٩٥٣	٣٨,١	٣٩,٩	٩٥,٥
١٩٥٤	٣٢,٦	٣٩,١	٨٣,٤
١٩٥٥	٣٨,٧	٣٨,٤	١٠٠,٨
١٩٥٦	٤١,٧	٣٧,٦	١١٠,٩
١٩٥٧	٤١,١	٣٦,٨	١١١,٧
١٩٥٨	٣٣,٨	٣٦,١	٩٣,٦
Σ	٤٣٨,٩	٤٣٨.٩	—

٧ـ تعيين التغيرات الموسمية:

لتحديد التغيرات الموسمية (العامل الموسمي) للسلسلة الزمنية في النموذج رقم (١) ـ نموذج الضرب ـ، لابد من تعيين كيفية تغير قراءات السلسلة من شهر لآخر خلال السنة. أو بمعنى آخر لابد من معرفة أثر الموسم في السلسلة التي تمثل الظاهرة محل الدراسة. ومجموعة الأعداد التي تبين القيم النسبية للظاهرة خلال شهور السنة تسمى «الدليل الموسمي» للظاهرة. فمثلا، إذا كانت المبيعات خلال شهور يناير، فبراير، مارس، إلخ لسنة ما هي على الترتيب ٥٠٪، ١٢٠٪، ٩٠٪. إلخ من المتوسط الشهري للمبيعات خلال السنة كلها فإن الأعداد ٥٠، ١٢٠، ٩٠،.. إلخ تكون هي الدليل الموسمي للظاهرة خلال هذه السنة. ولابد أن يساوى متوسط الدليل الموسمي للسنة ١٠٠٪ أي أن يكون مجموع الدلائل الموسمية مساو يا لـ ١٢٠٠٪.

وهناك عدة طرق لحساب الدليل الموسمي، نذكر منها الطريقتين الآتيتين:

ـ طريقة النسبة المئوية المتوسطة.

ـ طريقة النسبة إلى القيم الاتجاهية.

وسنركز دراستنا على الطريقة الثانية وتتلخص في الخطوات التالية:

(أ) نحصل على القيم الاتجاهية للظاهرة.

(ب) نعبر عن القيم الأصلية للظاهرة في كل فترة كنسبة مئوية من القيمة الاتجاهية لهذه الفترة. وذلك بقسمة القيمة الأصلية (ص) على القيمة الاتجاهية للظاهرة (صَ) وضرب الناتج في ١٠٠.

(حـ) نحسب متوسطا مناسباً للنسب المئوية للفترات المتناظرة السابق حسابها في البند (ب) فنحصل على الدليل الموسمي لهذه الفترة.

(د) لابد أن يكون مجموع الدليل الموسمي مساو يا ١٢٠٠٪ إذا كانت الفترة بالشهور ٤٠٠٪ إذا كانت الفترة ربع سنوية وهكذا. فإذا إختلف المجموع عن ذلك فلا بد من تعديله بطريقة مناسبة ليصبح المجموع ١٢٠٠٪، ٤٠٠٪ حسب الحالة.

وفيما يلي حل للمثالين رقم (٢)،(٣) لتوضح طريقة العمل.

مثال رقم ٧:

احسب الدليل الموسمي للمثال رقم (٢).

الحل

(أ) نقسم القيم الأصلية للظاهرة في كل فترة (ص) على القيم الاتجاهية المناظرة (صَ) ونضرب الناتج في ١٠٠ و بذلك نعبر عن القيم الأصلية كنسبة مئوية من القيم الاتجاهية لكل فترة. فنحصل على الجدول الآتي:

السنة ← الفترة ↓	١٩٧٤	١٩٧٥	١٩٧٦	١٩٧٧	١٩٧٨	١٩٧٩	المتوسط	الدليل الموسمي (بعد التصحيح)
الربيع	١١٠,٣٥	١٠٧,٤٦	١٠٠,٤٤	١٠٠,٩٨	١٠٣,١٦	٩٩,٩٩	١٠٣,٧٣	١٠٤
الصيف	١٢٣,٣٥	١١٦,١٣	١٢٠,٧٢	١١٧,٠٣	١١٤,٦١	١١٢,٨٩	١١٧,٤٦	١١٧
الخريف	٩٨,٦٩	١٠٠,٠٥	١٠٥,٧٨	١٠٥,٢١	١٠١,٤٥	١٠١,٦٠	١٠٢,١٤	١٠٢
الشتاء	٦٦,٠٩	٦٤,٧٨	٧٥,٩٥	٧٧,١٤	٨٩,٣٢	٩١,١٧	٧٧,٤١	٧٧
						المجموع	٤٠٠,٧٤	٤٠٠
						المتوسط	١٠٠,١٩	١٠٠

من الجدول نلاحظ أن مجموع المتوسط هو٤٠٠,٧٤ لذلك يجب تعديله ليصبح ٤٠٠٪ للحصول على الدليل الموسمي.

مثال رقم (٨):

احسب الدليل الموسمي للمثال رقم (٣):

الحل

(أ) نحسب القيم الاتجاهية للظاهرة باستخدام طريقة المربعات الصغرى ونلاحظ من المنحنى التاريخي للظاهرة «شكل رقم ٣» أن الاتجاه العام يأخذ شكل خط مستقيم.

وفي مثالنا هذا سنستخدم المتوسطات الشهرية للسنوات ١٩٥١ــ ١٩٥٨ بدلا من القيم الشهرية الواردة في المثال المذكور، ونكون الجدول الآتي والذي منه نحسب معادلة الاتجاه العام. مع ملاحظة أو افتراض أن المتوسطات الشهرية التي سنستخدمها في الحل تناظر ٣٠ يونيه ، أول يوليه من كل سنة. وكذلك البيانات الشهرية للظاهرة تناظر منتصف الشهر.

السنة	س	ص	س^٢	س ص
١٩٥١	٧ —	٢٧٣,٧	٤٩	— ١٩١٥,٩
١٩٥٢	٥ —	٢٩٣,٥	٢٥	— ١٤٦٧,٥
١٩٥٣	٣ —	٣١٥,٠	٩	— ٩٤٥,٠
١٩٥٤	١ —	٣٣٦,٨	١	— ٣٣٦,٨
١٩٥٥	١	٣٦٤,٤	١	٣٦٤,٤
١٩٥٦	٣	٣٩٤,٨	٩	١١٨٤,٤
١٩٥٧	٥	٤٢٤,٢	٢٥	٢١٢١,٠
١٩٥٨	٧	٤٥٨,٧	٤٩	٣٢١٠,٩
Σ	صفر	٢٨٦١,١	١٦٨	٢٢١٥,٥

ومن الجدول نجد أن معادلة الاتجاه العام هي:

ص= ١٣٫١٨٨ س+ ٣٥٧٫٦ حيث: نقطة الأصل هي ٣١ ديسمبر ١٩٥٤ أول يناير ١٩٥٥، وحدة الزمن $\frac{1}{2}$ سنة.

ولحساب القيم الاتجاهية للظاهرة. نجد من المعادلة السابقة أن قيم الظاهرة تزداد بمقدار ١٣٫١٨٨ كل نصف سنة أو بمقدار $\frac{١٣,١٨٨}{٦}$ = ٢٫٢٠ شهريا.

فلتقدير القيمة الاتجاهية لشهر يناير ١٩٥٥ نضع س=صفر فتكون القيمة الاتجاهية في أول يناير ٣٥٧٫٦.

وبإضافة ١/٢ شهر عليها تكون القيمة الاتجاهية لشهر يناير «منتصف يناير»= ٣٥٧٫٦+ ٢٫٢٠× $\frac{1}{2}$ = ٣٥٨٫٧ وبإضافة ٢٫٢٠ لها نحصل على القيمة الاتجاهية لشهر فبراير ١٩٥٥ وهكذا. وبطرح ٢٫٢٠ منها نحصل على القيمة الاتجاهية لشهر ديسمبر ١٩٥٤ وهكذا بالنسبة لجميع الشهور فنحصل على القيم الاتجاهية للظاهرة كما في الجدول الآتي:

الشهر / السنة	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيه	يوليه	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
١٩٥١	٢٥٣,١	٢٥٥,٣	٢٥٧,٥	٢٥٩,٧	٢٦١,٩	٢٦٤,١	٢٦٦,٣	٢٦٨,٥	٢٧٠,٧	٢٧٢,٩	٢٧٥,١	٢٧٧,٣
١٩٥٢	٢٧٩,٥	٢٨١,٧	٢٨٣,٩	٢٨٦,١	٢٨٨,٣	٢٩٠,٥	٢٩٢,٧	٢٩٤,٩	٢٩٧,١	٢٩٩,٣	٣٠١,٥	٣٠٣,٧
١٩٥٣	٣٠٥,٩	٣٠٨,١	٣١٠,٣	٣١٢,٥	٣١٤,٧	٣١٦,٩	٣١٩,١	٣٢١,٣	٣٢٣,٥	٣٢٥,٧	٣٢٧,٩	٣٣٠,١
١٩٥٤	٣٣٢,٣	٣٣٤,٥	٣٣٦,٧	٣٣٨,٩	٣٤١,١	٣٤٣,٣	٣٤٥,٥	٣٤٧,٧	٣٤٩,٩	٣٥٢,١	٣٥٤,٣	٣٥٦,٥
١٩٥٥	٣٥٨,٧	٣٦٠,٩	٣٦٣,١	٣٦٥,٣	٣٦٧,٥	٣٦٩,٧	٣٧١,٩	٣٧٤,١	٣٧٦,٣	٣٧٨,٥	٣٨٠,٧	٣٨٢,٩
١٩٥٦	٣٨٥,١	٣٨٧,٣	٣٨٩,٥	٣٩١,٧	٣٩٣,٩	٣٩٦,١	٣٩٨,٣	٤٠٠,٥	٤٠٢,٧	٤٠٤,٩	٤٠٧,١	٤٠٩,٣
١٩٥٧	٤١١,٥	٤١٣,٧	٤١٥,٩	٤١٨,١	٤٢٠,٣	٤٢٢,٥	٤٢٤,٧	٤٢٦,٩	٥٢٩,١	٤٣١,٣	٤٣٣,٥	٤٣٥,٧
١٩٥٨	٤٣٧,٩	٤٤٠,١	٤٤٢,٣	٤٤٤,٥	٤٤٦,٧	٤٤٨,٩	٤٥١,١	٤٥٣,٣	١٥٥,٥	٤٥٧,٧	٤٥٩,٩	٤٦٢,١

(ب) نقسم القيم الأصلية للظاهرة في كل شهر (ص) على القيم الاتجاهية المناظرة (صَ) ونضرب الناتج في ١٠٠ و بذلك نعبر عن القيم الأصلية كنسبة مئوية من القيم الاتجاهية لكل شهر. فنحصل على الجدول الآتي:

السنة / الشهر	١٩٥١	١٩٥٢	١٩٥٣	١٩٥٤	١٩٥٥	١٩٥٦	١٩٥٧	١٩٥٨	الوسيط	الدليل الموسمي بعد التصحيح
يناير	١٢٥,٦	١٢٢,٤	١٢٠,٠	١١٨,٠	١١٧,١	١١٧,٦	١١٨,٣	١٢٠,٨	١١٩,٢	١١٩,٦
فبراير	١١٠,١	٢١٠,٠	١٠٦,٥	١٠٤,٣	١٠٤,٧	١٠٦,٤	١٠٦,٤	١٠٨,٤	١٠٦,٤	١٠٦,٧
مارس	١٠٨,٠	١٠٥,٣	١٠٣,١	١٠١,٦	١٠١,٧	١٠٢,٢	١٠٣,١	١٠٤,٧	١٠٣,١	١٠٣,٤
أبريل	٩٦,٣	٩٣,٧	٩١,٨	٩١,٨	٩١,٤	٩٢,٤	٩٤,٠	٩٥,٢	٩٣,٠	٩٣,٣
مايو	٨٨,٢	٨٦,٤	٨٥,٥	٨٥,٠	٨٥,٤	٨٦,٦	٨٨,٠	٨٩,١	٨٦,٥	٨٦,٨
يونيه	٨١,٨	٨١,٢	٧٩,٢	٧٩,٥	٨٠,١	٨١,٣	٨٢,١	٨٤,٧	٨١,٢	٨١,٥
يوليه	٨٣,٧	٨٢,٧	٨١,٢	٨١,٦	٨٢,٠	٨٤,١	٨٤,١	٨٦,٢	٨٣,٢	٨٣,٥
أغسطس	٩١,٢	٨٨,٨	٨٨,٤	٨٧,٧	٨٨,٢	٨٩,٦	٩٠,٩	٩٢,٤	٨٩,٢	٨٩,٥
سبتمبر	٩٩,٤	٩٦,٠	٩٥,٥	٩٣,٧	٩٤,٦	٩٧,٣	٩٦,٧	٩٨,٤	٩٦,٨	٩٧,١
أكتوبر	١١٠,٧	١٠٧,٣	١٠٥,٩	١٠٣,٤	١٠٤,٦	١٠٥,٥	١٠٦,٠	١٠٧,٧	١٠٦,٠	١٠٦,٣
نوفمبر	١١٨,١	١١٣,٤	١١١,٩	١٠٩,٨	١١٠,٨	١١١,٥	١١٣,٣	١١٤,٤	١١٢,٦	١١٣,٠
ديسمبر	١٢٥,١	١١٩,٩	١١٩,٤	١١٧,٠	١١٧,٠	١١٨,٠	١١٨,٤	١٢١,٢	١١٨,٩	١١٩,٣
								المجموع	١١٩٦,١	١٢٠٠
								المتوسط	٩٩,٧	١٠٠

ونلاحظ على هذا الجدول ما يلي:

١ـ اننا في حساب المتوسط استخدمنا الوسيط بدلا من الوسط الحسابي وذلك لتلافي تأثير القيم المتطرفة.

٢ـ مجموع الدليل الموسمي (مجموع الوسيط) لم يساو ١٢٠٠٪ ولكن ١١٩٦,١٪ ولذلك لزم تصحيحه بضرب كل قيمة من قيم الوسيط في المقدار $\frac{١٢٠٠}{١١٩٦.١}$ فنحصل بذلك على الدليل الموسمي ومجموعه يساوى ١٢٠٠٪ كما هومبين في العمود الأخيرمن الجدول.

٨ـ استبعاد أثر التغيرات الموسمية:

يمكن استبعاد أثر التغيرات الموسمية وذلك بقسمة القيم الأصلية للظاهرة في كل فترة على الدليل الموسمي المناظر لهذه الفترة.

والجدول الآتي يوضح قيم الظاهرة في المثال رقم (٣) بعد تخليصها من أثر الموسم أو بمعنى آخر بعد استبعاد أثر التغير الموسمي.

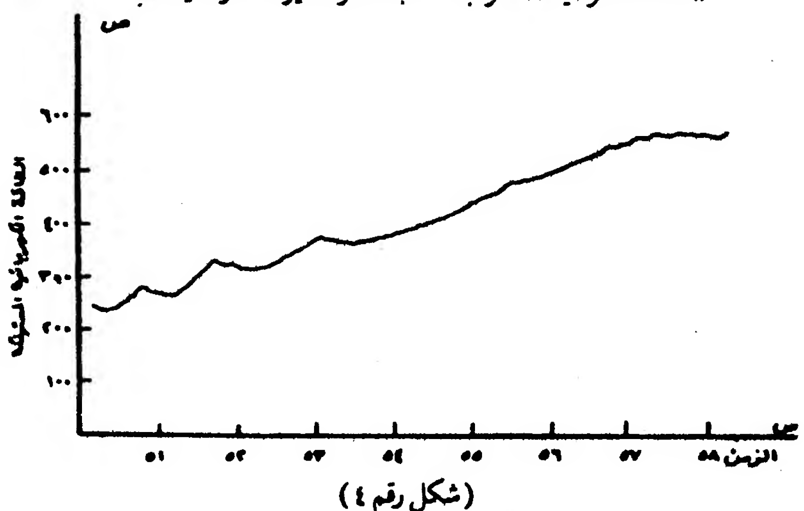
الشهر ← السنة ↓	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
١٩٥١	٢٦٦	٢٦٣	٢٦٩	٢٦٨	٢٦٦	٢٦٥	٢٦٧	٢٧٤	٢٧٦	٢٨٤	٢٨٨	٢٩٠
١٩٥٢	٢٨٦	٢٩٠	٢٨٩	٢٨٧	٢٨٧	٢٩٠	٢٩٠	٢٩٣	٢٩٧	٣٠٢	٣٠٣	٣٠٥
١٩٥٣	٣٠٧	٣٠٧	٣٠٩	٣٠٨	٣١٠	٣٠٨	٣٠١	٣١٧	٣١٨	٣٢٥	٢٢٥	٣٣٠
١٩٥٤	٣٢٨	٣٢٧	٣٣١	٣٣٣	٣٣٤	٣٣٥	٣٣٨	٣٤١	٣٣٨	٣٤٢	٣٤٤	٣٤٩
١٩٥٥	٣٥١	٣٥٤	٣٥٨	٣٥٨	٣٦٢	٣٦٣	٣٦٥	٢٦٩	٣٦٧	٣٧٣	٣٧٣	٣٧٩
١٩٥٦	٣٧٩	٣٨٦	٣٨٥	٣٨٨	٣٩٣	٣٩٥	٤٠١	٤٠١	٤٠٤	٤٠٢	٤٠٢	٤٠٥
١٩٥٧	٤٠٧	٤١٢	٤١٥	٤٢١	٤٢٦	٤٢٦	٤٢٨	٤٣٣	٤٢٧	٤٣٥	٤٣٥	٤٣٣
١٩٥٨	٤٤٢	٤٤٧	٤٤٨	٤٥٣	٤٥٨	٤٦٦	٤٦٦	٤٦٨	٤٦١	٤٦٤	٤٦٦	٤٦٩

وجميع القيم الموضحة في الجدول السابق مستبعد منها أثر التغير الموسمي ولكنها خاضعة للاتجاه العام والتغيرات الدورية والعرضية.

وإذا أردنا تخليص القيم الأصلية للظاهرة من تأثير الاتجاه العام والتغير الموسمي، فإننا نقسم القيم الأصلية على القيم الاتجاهية المناظرة لها فنخلصها من أثر الاتجاه العام ثم نقسم الناتج على الدليل الموسمي فنخلصها من أثر التغيرات الموسمية و بذلك نحصل على القيم خالصة من أثر الاتجاه العام والموسم معاً.

والشكل الآتي (شكل رقم ٤) يوضح السلسلة الزمنية للظاهرة الموضحة في مثال رقم (٣) بعد استبعاد أثر التغيرات الموسمية منها.


«السلسلة الزمنية للظاهرة بعد استبعاد أثر التغيرات الموسمية.».



(شكل رقم ٤)

و يتضح من الشكل السابق أن منحنى الظاهرة بعد استبعاد أثر التغيرات الموسمية منه يكاد ينطبق مع الخط المستقيم بالرغم من وجود بعض الذبذبات البسيطة به.

٩ـ حساب التغيرات الدورية:

سبق وأن ذكرنا أن القيمة الفعلية التي تأخذها الظاهرة في أي لحظة زمنية تتكون من أربع مؤثرات هي:

(أ) التغيرات الاتجاهية.

(ب) التغيرات الموسمية.

(حـ)التغيرات الدورية.

(د) التغيرات الفجائية.

ولقد استخدمنا النموذج الذي يعتبر أن القيمة الفعلية لهذه الظاهرة هي عبارة عن حاصل ضرب قيم هذه المؤثرات بعضها ببعض. وعلى ذلك فإذا أردنا تعيين أثر التغيرات الدورية فيجب أن نستبعد من الأرقام الفعلية أثر التغيرات الأخرى.

فإذا قسمنا القراءات الأصلية على حاصل ضرب الاتجاه العام في الدليل الموسمي فإننا نحصل على قراءات تدل على التغيرات الدورية والتغيرات الفجائية.

و بعد ذلك نعمل على استبعاد التغيرات الفجائية والتي غالباً ما تكون قصيرة المدى ويمكن حذفها بطريقة المتوسطات المتحركة وربما يستحيل استبعاد التغيرات الفجائية وذلك لأنها بطبيعتها لا تتبع قانوناً أو نظاماً معيناً فلا سبيل إلى معرفة مقدارها.

ولتوضيح طريقة تعيين مقدار التغيرات الدورية نأخذ المثال الآتي: نرى مثلا أن كمية الطاقة

الكهربائية المستهلكة في شهر يناير سنة ١٩٥١(في المثال رقم ٨) هي ٣١٨ مليون كيلوات/ ونرى أن القيمة الاتجاهية في نفس الشهر هي ٢٥٣٫١ مليون كيلوات/ ساعة . فإذا استبعد الاتجاه العام بقسمة الكمية الفعلية على القيمة الاتجاهية نحصل على ١٢٥٫٦٪ .

ونعلم أن الدليل الموسمي في شهر يناير من أي سنة هو ١١٩٫٦٪ .

وخارج قسمة هاتين النسبتين $\frac{١٢٥٫٦}{١١٩٫٦}$ يرجع إذن إلى التغيرات الدورية على فرض وجود تغيرات فجائية في هذا الشهر.

مثال عام

كانت مبيعات إحدى الشركات في الفترة من سنة ١٩٥٤ حتى سنة ١٩٥٦ كما يلي :

السنة	١٩٥٤	١٩٥٥	١٩٥٦
قيمة المبيعات (بالألف)	٩٥	١٠٥	١٠٠

وكانت المبيعات الربع سنوية كالآتي :

الربع / السنة	١٩٥٤	١٩٥٥	١٩٥٦
الأول	٢٠	٢٥	٢٥
الثاني	٢٠	٢٠	١٥
الثالث	٢٠	٢٥	٣٠
الرابع	٣٥	٣٥	٣٠

والمطلوب :

(أ) حساب القيم الاتجاهية للظاهرة .

(ب) إيجاد الدليل الموسمي للظاهرة .

(حـ)استبعاد أثر التغيرات الموسمية من البيانات .

(د) رسم المنحنى التاريخي للظاهرة وكذلك البيانات بعد استبعاد أثر التغيرات الموسمية منه

(هـ)حساب مبيعات الشركة في الربع الأول لسنة ١٩٥٧ .

(و) هل من توصيات بخصوص الفترة التي يجب أن تقوم فيها بالإعلان ؟

الحل

أ – نحسب القيم الاتجاهية للظاهرة باستخدام طريقة المربعات الصغرى، مع ملاحظة أن المنحنى التاريخي للظاهرة يأخذ شكل خط مستقيم.

السنة	س	قيم الظاهرة ص	$س^2$	س ص
الربع ١ عام ١٩٥٤	– ١١	٢٠	١٢١	– ٢٢٠
الربع ٢	– ٩	٢٠	٨١	– ١٨٠
الربع ٣	– ٧	٢٠	٤٩	– ١٤٠
الربع ٤	– ٥	٣٥	٢٥	– ١٧٥
الربع ١ عام ١٩٥٥	– ٣	٢٥	٩	– ٧٥
الربع ٢	– ١	٢٠	١	– ٢٠
الربع ٣	١	٢٥	١	٢٥
الربع ٤	٣	٣٥	٩	١٠٥
الربع ١ عام ١٩٥٦	٥	٢٥	٢٥	١٢٥
الربع ٢	٧	١٥	٤٩	١٠٥
الربع ٣	٩	٣٠	٨١	٢٧٠
الربع ٤	١١	٣٠	١٢١	٣٣٠
$\sum$	صفر	٣٠٠	٥٧٢	١٥٠

$\sum$ ص = ا $\sum$ س + ن ب .. ٣٠٠ = ١٢ ب ومنها ب = ٢٥

$\sum$ س ص = ا $\sum$ $س^2$ + ب $\sum$ س ∴ ١٥٠ = ٥٧٢ ا ومنها ا = ٠,٢٦

وبذلك تكون معادلة الاتجاه العام هي:

ص= ٠,٢٦س+ ٢٥ حيث: نقطة الأصل منتصف الفترة بين الربع الثاني والثالث عام ١٩٥٥.

وحدة الزمن: نصف فترة (حيث الفترة ١/٤ سنة).

وبالتعويض بقيم س= –١، –٣، ...، –١١، ١، ٣، ...، ١١ في معادلة الاتجاه العام السابق الحصول عليها نحصل على القيم الاتجاهية للظاهرة كما في الجدول الآتي:

السنة / الربع	الأول	الثانى	الثالث	الرابع
١٩٥٤	٢٢,١	٢٢,٧	٢٣,٢	٢٣,٧
١٩٥٥	٢٤,٢	٢٤,٧	٢٥,٣	٢٥.٨
١٩٥٦	٢٦,٣	٢٦,٨	٢٧,٣	٢٧,٩

(ب) ايجاد الدليل الموسمي للظاهرة:

ـ نقسم القيم الأصلية للظاهرة في كل ربع (ص) على القيم الاتجاهية المناظرة (صَ) ونضرب الناتج في ١٠٠ وبذلك نعبر عن القيم الأصلية كنسبة مئوية من القيم الاتجاهية لكل ربع سنة. فنحصل على الدليل الموسمي كما يتضح من الجدول الآتي:

الربع / السنة	١٩٥٤	١٩٥٥	١٩٥٦	المتوسط	الدليل الموسمى (بعد التصحيح)
الأول	٩١	١٠٣	٩٥	٩٦,٣	٧٦
الثانى	٨٨	٨١	٥٦	٧٥,٠	٧٥
الثالث	٨٦	٩٩	١١٠	٩٨,٣	٩٨
الرابع	١٤٨	١٣٦	١٠٨	١٣٠,٧	١٠١
			المجموع	٤٠٠,٣	٤٠٠
			المتوسط	١٠٠,١	١٠٠

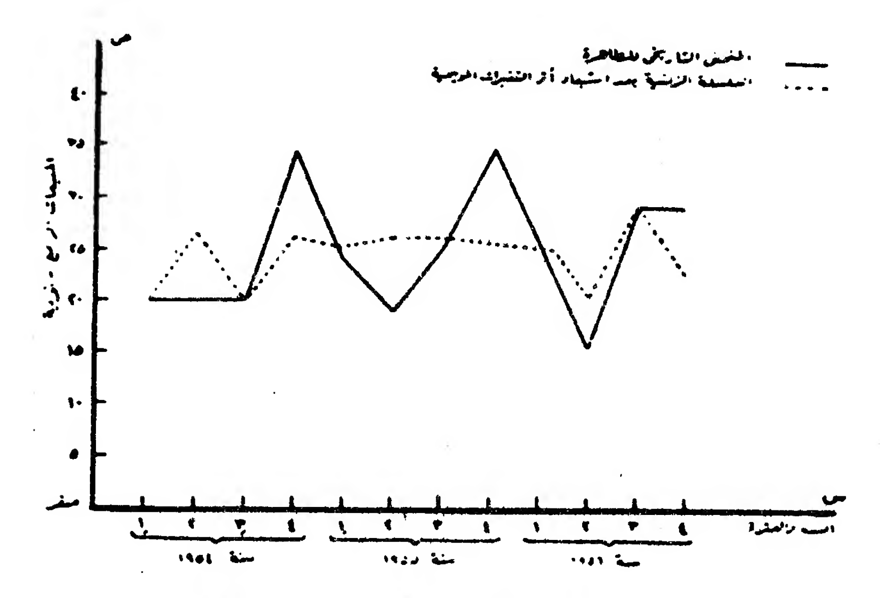
(جـ) استبعاد أثر التغيرات الموسمية:

يتم استبعاد أثر التغيرات الموسمية وذلك بقسمة القيم الأصلية للظاهرة في كل فترة على الدليل الموسمي المناظر لهذه الفترة.

والجدول الآتي يوضح قيم الظاهرة بعد تخليصها من أثر الموسم أوبمعنى آخر بعد استبعاد أثر التغير الموسمي منها.

السنة \ الربع	الأول	الثانى	الثالث	الرابع
١٩٥٤	٢٠٫٨	٢٦٫٦	٢٠٫٤	٢٦٫٧
١٩٥٥	٣٦	٢٦٫٦	٢٥٫٥	٢٦٫٧
١٩٥٦	٢٦	٢٠	٣٠٫٦	٢٣

(د) رسم المنحنى التاريخي للظاهرة وكذلك بعد استبعاد أثر التغيرات الموسمية:



(هـ) مبيعات الشركة في الربع الأول من عام ١٩٥٧:

بالتعويض بقيمة س= ١٣ في معادلة الاتجاه العام السابق الحصول عليها نحصل على قيمة مبيعات الشركة كما يلي:

ص= ٢٦ر×١٣+ ٢٥

= ٣ر٣٨+ ٢٥= ٢٨ر٣٨ ألف ريال.

(و) التوصيات بخصوص الفترة التي يجب أن تقوم فيها الشركة بحملة اعلانية:

بدراسة الدليل الموسمي في الأرباع المختلفة للسنة، نلاحظ أن المبيعات في الربع الثاني أقل من المبيعات في باقي أرباع السنة. لذلك يلزم على الشركة القيام بحملة دعاية وإعلان في الربع الأول من كل سنة حتى تؤتي أثرها على هذا الربع والربع الثاني بصفة خاصة.

تمارين

١ ــ (أ) عرف السلسلة الزمنية.

(ب) تكلم باختصار عن مكونات السلسلة الزمنية.

(حـ) أذكر النماذج الرياضية التي تستخدم في وصف السلسلة الزمنية.

٢ ــ فيما يلي بيانات كمية الفحم «بالألف طن» المنتجة في إحدى الدول في ثلاث فترات خلال عده سنوات.

الفترة ← السنة ↓	الأولى	الثانية	الثالثة
١٩٧٠	٥	١١	٨
١٩٧١	٩	١٤	١١
١٩٧٢	١٢	١٨	١٥
١٩٧٣	١٥	٢٤	٢٠

والمطلوب:

أ ــ رسم المنحنى التاريخي للظاهرة.

ب ــ إيجاد القيم الاتجاهية.

جـ ــ حساب الدليل الموسمي.

د ــ استبعاد أثر الموسم من هذه البيانات

هـ ــ قارن بين النتائج التي حصلت عليها في (ب)،(د).

٣ ــ كانت المبيعات الربع سنوية لإحدى الشركات بآلاف الريالات في بلد ما في الفترة من سنة ١٩٥٢ حتى سنة ١٩٥٨ كما يلي:

السنة ← الربع ↓	١٩٥٢	١٩٥٣	١٩٥٤	١٩٥٥	١٩٥٦	١٩٥٧	١٩٥٨
الأول	١٥	٢٠	٢٠	٢٥	٢٥	٣٠	٢٥
الثانى	٢٥	٢٥	٢٠	٢٠	١٥	٣٥	٤٠
الثالث	٢٠	٢٥	٢٠	٢٥	٣٠	٣٥	٣٠
الرابع	٢٥	٣٠	٣٥	٣٥	٣٠	٣٥	٣٠

والمطلوب :

أ ـ إيجاد الدليل الموسمي للظاهرة .

ب ـ استبعاد أثر التغيرات الموسمية من البيانات .

جـ ـ رسم المنحنى التاريخي للظاهرة وكذلك البيانات بعد استبعاد أثر التغيرات الموسمية منها .

د ـ حساب مبيعات الشركة في الربع الأول لسنة ١٩٥٩ وكذلك الربع الرابع لسنة ١٩٦٠ .

هـ ـ هل لديك توصيات بالنسبة للفترة التي يجب أن تقوم الشركة فيها بالإعلان ؟

٤ ـ الجدول الآتي يوضح تطوير الإنتاج لسلعة ما في السنوات من ١٩٦١ حتى ١٩٧٠ .

السنة	١٩٦١	٦٢	٦٣	٦٤	٦٥	٦٦	٦٧	٦٨	٦٩	٧٠
كمية الإنتاج (بالألف طن)	٦٦	٥٠	٥٥	٥٩	٩٧	١٢٢	١٥٣	١٤٠	١٠٤	١١٠

والمطلوب :

أ ـ حساب القيم الاتجاهية .

ب ـ استبعاد أثر الاتجاه العام من البيانات .

جـ ـ حساب الكميات المنتظر إنتاجها عامي ١٩٧٢ ، ١٩٧٥ .

٥ ـ الجدول الآتي يبين كمية المنسوجات القطنية التي صدرتها إحدى البلاد خلال الفترة من سنة ١٩٥٠ حتى ١٩٦٠ .

السنة	١٩٥٠	٥١	٥٢	٥٣	٥٤	٥٥	٥٦	٥٧	٥٨	٥٩	٦٠
الصادرات (بالألف طن)	٤٠	٣٩	٤٥	٤٧	٤٦	٤٣	٤٦	٥٧	٦١	٦٢	٦٣

والمطلوب

أ ـ حساب معادلة الاتجاه العام المستقيم لكمية المنسوجات المصدرة .

ب ـ حساب القيم الاتجاهية المناظرة .

جـ ـ استبعاد أثر الاتجاه العام من البيانات .

د ـ حساب كمية المنسوجات المصدرة عام ١٩٦٤ .

٦ ـ فيما يلي مبيعات إحدى الشركات خلال السنوات من ١٩٥٥ حتى ١٩٥٩ بآلاف الريالات .

السنة ← الفترة ↓	١٩٥٥	١٩٥٦	١٩٥٧	١٩٥٨	١٩٥٩
الربع الأول	٩٧	١٢٤	١٢٦	١٢٠	١٣٠
الربع الثانى	١٢١	١١٦	١٣٥	١٣٠	١٥٥
الربع الثالث	٩٥	١٣٥	١٣٨	١٤٥	١٥٠
الربع الرابع	١٢٤	١٠٨	١٢٤	١٤٢	١٣٥

والمطلوب:

أ ـ إيجاد الدليل الموسمي للظاهرة.

ب ـ استبعاد أثر التغيرات الموسمية من البيانات.

حـ ـ ارسم المنحنى التاريخي للظاهرة وكذلك البيانات بعد استبعاد أثر التغيرات الموسمية منها.





الباب السابع

الأرقام القياســـية



الأرقام القياسية

١ ـ مقدمة:

عند تتبع ظاهرة ما نلاحظ أنها تتغير من وقت لآخر أو من مكان لآخر، ولقياس مقدار هذا التغير نلجأ إلى حساب النسبة المئوية للتغير في قيمة الظاهرة وهذا يسمى بالرقم القياسي، أي أن الرقم القياسي هو مقياس إحصائي يبين التغيرات التي تطرأ على ظاهرة ما أو على مجموعة من الظواهر المترابطة خلال فترة زمنية أو منطقة جغرافية. وعادة تعرف الفترة أو المكان الذي ننسب إليه بفترة أو مكان الأساس والفترة أو المكان الذي ننسبه بفترة أو مكان المقارنة. و باستخدام الأرقام القياسية نستطيع مقارنة كثير من الظواهر من وقت إلى آخر أو من منطقة لأخرى.

وأمثلة الأرقام القياسية كثيرة ومتعددة لأنها أصبحت شائعة في نواحي الحياة الاقتصادية والاجتماعية. فهناك الرقم القياسي للأسعار والذي يأخذ صوراً كثيرة منها الرقم القياسي لنفقة المعيشة (أسعار المستهلكين) والرقم القياسي لأسعار الجملة. كما أن هناك الرقم القياسي للانتاج الزراعي والإنتاج الصناعي والأجور والتجارة الداخلية والخارجية وغير ذلك. وعلى الرغم من أن الأرقام القياسية تستخدم أساساً في عالم الاقتصاد وإدارة الأعمال إلا أن لها تطبيقات كثيرة في مجالات مختلفة، فمثلا في مجال التعليم قد تستخدم لمقارنة ذكاء الطلاب في مناطق مختلفة أو أعوام مختلفة.

وفي هذا الباب سنقتصر في دراستنا على الأرقام القياسية للأسعار لكونها أكثر الأرقام استعمالا مع الأخذ في الاعتبار أن الأسس والقواعد العامة التي تراعى عند تركيبها تكاد تكون هي نفسها التي تستخدم في تركيب باقي الأرقام السابق ذكرها أو أي أرقام قياسية أخرى.

٢ ـ تعريف الرقم القياسي:

يعرف الرقم القياسي بأنه رقم نسبي يقيس التغير في ظاهرة واحدة أو أكثر من وقت لآخر أو من مكان إلى آخر، و يتم الحصول عليه بنسبة قيمة الظاهرة في فترة المقارنة (أو مكان المقارنة) إلى قيمتها في فترة الأساس (أو مكان الأساس) ويمكن أن يتم ذلك أيضا بالنسبة لأكثر من ظاهرة.

فإذا تم نسبة قيمة ظاهرة واحدة في فترة المقارنة إلى قيمتها في فترة الأساس نحصل على ما يسمى «بالمنسوب» وهو أبسط صور الرقم القياسي، فمثلا، إذا بلغ سعر سلعة ما في عام ١٩٧٠ ـ ١٥٠ ريال وكان سعرها في عام ١٩٦٥ ـ ٩٠ ريالاً فإن منسوب السعر لهذه السلعة $= \frac{١٥٠}{٩٠} \times ١٠٠ =$

١٦٦٫٧ وهذا يوضح أن سعر هذه السلعة قد زاد في عام ١٩٧٠ بمقدار ٦٦٫٧٪ من سعرها في عام ١٩٦٥.

غير أن تركيب الرقم القياسي لايكون عادة بمثل هذه السهولة، إذ غالباً ما يشمل على أكثر من سلعة، و يطلق على الرقم الذي يتم فيه نسبة مجموعة من السلع في فترة المقارنة إلى نفس السلع في فترة الأساس «بالرقم القياسي».

وعند تركيب الرقم القياسي للأسعار يجب أن تتحد طبيعة السلع الداخلة في تركيبه في فترتي المقارنة والأساس (أو مكان المقارنة والأساس) من حيث نوع السلع (مادة خام، نصف مصنعة، تامة الصنع) أو طريقة البيع (جملة أو تجزئة) .. إلخ، حتى لايكون الرقم القياسي مضللا وعديم الفائدة.

٣ــ اختيار فترة الأساس:

حتى يكون الرقم القياسي معبراً عن التغير في الظاهرة، يجب أن تتصف فترة الأساس بالصفات الآتية:

أــ أن تكون فترة عادية تتميز بالاستقرار و بعدها عن الظروف الشاذة مثل الأزمات الاقتصادية والحروب وانتشار الأوبئة وما شابه ذلك.

بــ ان تكون قريبة نسبياً من فترة المقارنة حتى لاتختلف الظروف بين الفترتين اختلافاً بيناً يفقد الرقم أهميته. فلا يصح مثلا استخدام أسعار عام ١٩٣٠ كأساس لتركيب رقم قياسي لعام ١٩٧٠.

ومن الطبيعي أن الشهر لايصلح أخذه كأساس لقصره ولتعرضه للتغيرات الموسمية والعرضية، وغالباً ما تؤخذ السنة كأساس وان كان يحسن أخذ متوسط عدة سنوات.

و بعد الانتهاء من اختيار فترة الأساس إما أن نأخذها كأساس ثابت ننسب إلى أسعارها أسعار الفترات الأخرى مهما بعدت عنها، أو نتخذها كأساس متحرك ننسب إلى أسعارها الأسعار في الفترة التالية لها فقط ثم ننسب الأسعار في كل فترة إلى الأسعار في الفترة السابقة لها مباشرة. إلا أنه من الضروري إعادة النظر كل فترة من الزمن في لختيار فترة الأساس وذلك لتغير أنماط الاستهلاك ولفقد بعض السلع لأهميتها بمرور الوقت وظهور سلع جديدة لها اهميتها مما يجعل من المتعذر إتفاق مجموعة السلع في فترتي الأساس والمقارنة.

٤ــ بعض المصطلحات:

نعرض فيما يلي للرموز التي سنستخدمها عند تركيب الأرقام القياسية.

الرمز (٠) يشير إلى فترة الأساس.

الرمز (١) يشير إلى فترة المقارنة.

الرمز (ع) يشير إلى السعر.
الرمز (ك) يشير إلى الكمية.
الرمز (س) يشير إلى منسوب السعر.
وعلى ذلك فإن: $ع_{.}$ هو سعر السلعة في فترة الأساس.
$ع_{1}$ هو سعر السلعة في فترة المقارنة.
$ك_{.}$ هو كمية السلعة في فترة الأساس.
$ك_{1}$ هو كمية السلعة في فترة المقارنة.
$س_{ر}$ هو منسوب السعر للسلعة ر.
$ع_{ر}$ سعر السلعة ر في فترة الأساس.
$ع_{ر1}$ سعر السلعة في فترة المقارنة.
$ك_{ر}$ كمية السلعة ر في فترة الأساس.
$ك_{ر1}$ كمية السلعة ر في فترة المقارنة.

٥ ـ اساليب تركيب الرقم القياسي:

يتم تركيب الرقم القياسي للأسعار باستخدام الأسلوب التجميعي أو أسلوب المناسيب:

١ ـ الأسلوب التجميعي:

وفيه نجمع أسعار السلع في فترة المقارنة بطريقة ما وكذلك أسعار نفس السلع في فترة الأساس بنفس الطريقة ونضرب خارج قسمة المجموع الأول على المجموع الثاني في ١٠٠، و يطلق على الرقم القياسي الذي يتم تركيبه بهذا الأسلوب «الرقم التجميعي للأسعار».

وفي هذا الأسلوب يأخذ الرقم القياسي للأسعار أحد الصيغتين الآتيتين:
(أ) الرقم التجميعي البسيط للأسعار.
(ب) الرقم التجميعي المرجح للأسعار.
وفيما يلي شرح لكل من هذين الرقمين.

(أ) الرقم التجميعي البسيط للأسعار:

يحسب الرقم التجميعي البسيط للأسعار بقسمة مجموع أسعار السلع الداخلة في تركيبه في فترة المقارنة على مجموع أسعار نفس السلع في فترة الأساس ثم يضرب خارج القسمة في ١٠٠.

وباختصار يكتب الرقم القياسي على الصورة $= \frac{\sum_{ر} ع_{ر1}}{\sum_{ر} ع_{ر}} \times ١٠٠$

$$= \frac{\sum ع_{1}}{\sum ع_{0}} \times ١٠٠ \qquad (١)$$

مثال رقم (١):

فيما يلي أسعار ثلاث سلع في عامي ١٩٦٠ ، ١٩٦٥ ، والمطلوب حساب الرقم التجميعي البسيط لأسعار عام ١٩٦٥ باستخدام أسعار عام ١٩٦٠ كأساس:

السلع	أسعار عام ١٩٦٥	أسعار عام ١٩٦٠
أ	٣	٢
ب	٦	٥
جـ	٩	٨

الحل

$$\text{الرقم التجميعي البسيط للاسعار} = \frac{\sum ع_{1}}{\sum ع_{0}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{٣ + ٦ + ٩}{٢ + + ٥ + ٨} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٨}{١٥} \times ١٠٠$$

$$= ١٢٠$$

أي أن الأسعار قد ارتفعت في المتوسط عام ١٩٦٥ بمقدار ٢٠٪ عما كانت عليه في عام ١٩٦٠ .

و بالرغم من أن الصيغة السابقة تعتبر من أبسط الصيغ التي يمكن استخدامها لتركيب الرقم القياسي، إلا أنها أيضا أكثر هذه الصيغ بدائية و يعاب عليها أنها تساوى في الأهمية النسبية للسلع التي تدخل في تركيب الرقم القياسي في حين تكاد تنعدم الحالات التي تتساوى فيها السلع في الأهمية. كذلك يؤخذ على هذه الصيغة أيضاً، استحالة استخدامها في حساب الرقم القياسي للكميات إذا اختلفت وحدات قياس السلع الداخلة في تركيبه، ولذلك فمن النادر قياس التغير في الكمية بهذه الصيغة.

(ب) الرقم التجميعي المرجح للأسعار:

لتلافي العيوب التي تأخذ على الرقم التجميعي البسيط وخاصة مساواته في الأهمية بين السلع الداخلة في تركيبه، نحاول إعطاء هذه السلع أوزاناً تتناسب مع أهميتها. وفي حالة الرقم القياسي للأسعار يمكن اعتبار الكميات المنتجة من كل سلعة من أنسب الأ وزان التي تستخدم في الترجيح.

وهذه الكميات إما أن تكون الكميات المنتجة في فترة الأساس (ك.) أو الكميات المنتجة في فترة المقارنة ($ك_1$). فإذا تم الترجيح باستخدام كميات فترة الأساس (ك.) نحصل على ما يسمى بـ «الرقم التجميعي للأسعار المرجح بكميات الأساس» أو «رقم لاسبير للأسعار» وصيغته هي:

$$\frac{\sum ع_1 \, ك_0}{\sum ع_0 \, ك_0} \times ١٠٠ \quad \ldots \ldots \quad (٢)$$

أما إذا تم الترجيح باستخدام كميات فترة المقارنة ($ك_1$) فإنه ينتج لدينا ما يسمى بـ «الرقم التجميعي للأسعار المرجح بكميات المقارنة» أو «رقم باشي للأسعار» وصيغته هي:

$$\frac{\sum ع_1 \, ك_1}{\sum ع_0 \, ك_1} \times ١٠٠ \quad \ldots \ldots \quad (٣)$$

و بالرغم من وضوح مدلول كل من رقمي لاسبير و باشي للأسعار. إلا أن البعض يعترض عليهما باعتبار أن رقم لاسبير يفترض أن أذواق المستهلكين تظل ثابتة من فترة الأساس (مهما بعدت) إلى فترة المقارنة بحيث أنهم يستمرون في استهلاك نفس كميات السلع بغض النظر عن ارتفاع الأسعار أو إنخفاضها، بينما الواقع أن يكون هناك تحول من السلع التي ارتفع سعرها إلى السلع التي انخفض سعرها. ومن جهة أخرى يفترض رقم باشي أن المستهلك يكون قد اشترى في فترة الأساس نفس الكميات التي يشتريها في فترة المقارنة وهذا فيه مخالفة كبيرة للواقع.

ويمكن استخدام كميات فترتي الأساس والمقارنة معاً كأوزان للترجيح باستخدام الوسط الحسابي أو الوسط الهندسي لهما. فنحصل في الحالة الأولى على الصيغة الآتية والتي تعرف باسم «رقم أدجورث للأسعار» وهو:

$$\frac{\sum ع_1 \, (ك_0 + ك_1)}{\sum ع_0 \, (ك_0 + ك_1)} \times ١٠٠ \quad \ldots \ldots \quad (٤)$$

وفي الحالة الثانية نحصل على الصيغة الآتية:

$$\frac{\sum ع_1 \sqrt{ك_0 \, ك_1}}{\sum ع_0 \sqrt{ك_0 \, ك_1}} \times ١٠٠ \quad \ldots \quad (٥)$$

والصيغتان (٤، ٥) بالرغم من قلة استخدامهما عملياً أقل من الصيغتين (٢)، (٣) في تمثيل التغير الذي يطرأ على الأسعار لاحتوائها على كميات فترتي الأساس والمقارنة معاً، مما يتلافى ولو جزئيا الاعتراضات الموجهة لرقمي لاسبير و باشي للاسعار.

ولقد قام فيشر بتكوين رقم قياسي للأسعار يجمع بين رقمي لاسبير و باشي وأطلق عليه «الرقم القياسي الأمثل» وهوعبارة عن الوسط الهندسي لرقمي لاسبير و باشي للأسعار وصيغته هي:

$$\sqrt{\text{رقم لاسبير} \times \text{رقم باشي}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{مج}\ ع_{1}\ ك_{.}}{\text{مج}\ ع_{.}\ ك_{.}} \times \frac{\text{مج}\ ع_{1}\ ك_{1}}{\text{مج}\ ع_{.}\ ك_{1}}} \times ١٠٠ \qquad (٦)$$

مثال رقم (٢):

إذا أخذنا المثال رقم (١) وأضفنا إلى بياناته كميات السلع المختلفة في سنتي المقارنة والأساس ليصبح كما يلي

السلع	الأسعار		الكميات	
	عام ١٩٦٥	عام ١٩٦٠	عام ١٩٦٥	عام ١٩٦٠
أ	٣	٢	١٣	١١
ب	٦	٥	٣٠	١٤
جـ	٩	٨	٣	١

فالمطلوب حساب:

١ـ الرقم التجميعي للأسعار المرجح بكميات سنة الأساس (رقم لاسبير).
٢ـ الرقم التجميعي للاسعار المرجح بكميات سنة المقارنة (رقم باشي).
٣ـ الرقم القياسي الأمثل للأسعار (رقم فيشر).

وذلك لأسعار عام ١٩٦٥ باستخدام اسعار عام ١٩٦٠ كأساس.

الحل

لتنظيم الحل ولتسهيل العمليات الحسابية نكون الجدول الآتي والذي يشمل على كافة البيانات اللازمة لحساب الأرقام القياسية المطلوبة:

السلع	ع١	ع.	ك١	ك.	ع. ك.	ع. ك١	ع١ ك.	ع١ ك١
أ	٣	٢	١٣	١١	٢٢	٢٦	٣٣	٣٩
ب	٦	٥	٣٠	١٤	٧٠	١٥٠	٨٤	١٨٠
جـ	٩	٨	٣	١	٨	٢٤	٩	٢٧
				Σ	١٠٠	٢٠٠	١٢٦	٢٤٦

الرقم التجميعي للاسعار المرجح بكميات سنة الأساس = $\frac{\sum \text{ع}_1\text{ك}_0}{\sum \text{ع}_0\text{ك}_0} \times ١٠٠$

(رقم لاسبير للاسعار)

$= \frac{١٢٦}{١٠٠} \times ١٠٠$

$= ١٢٦$

أي أن الأسعار زادت في المتوسط عام ١٩٦٥ بمقدار ٢٦٪ عما كانت عليه عام ١٩٦٠.

الرقم التجميعي للاسعار المرجح بكميات سنة المقارنة = $\frac{\sum \text{ع}_1\text{ك}_1}{\sum \text{ع}_0\text{ك}_1} \times ١٠٠$

(رقم باشي للاسعار)

$= \frac{٢٤٦}{٢٠٠} \times ١٠٠ = ١٢٣$

وهذا يدل على ارتفاع الأسعار من عام ٦٠ إلى عام ٦٥ بمقدار ٢٣٪ عما كانت عليه في سنة الأساس.

والرقم القياسي الأمثل للاسعار = $\sqrt{\text{رقم لاسبير} \times \text{رقم باشي}}$

(رقم ينشر للأسعار) $= \sqrt{١٢٦ \times ١٢٣}$

$= ١٢٤,٦$

أي أن الأسعار زادت في عام ١٩٦٥ بمقدار ٢٤٫٦٪ عما كانت عليه عام ١٩٦٠.

و يلاحظ أننا حصلنا على نتائج مختلفة إلا أنها تدل كلها على نفس الاتجاه، وهذا الاختلاف ناتج عن اختلاف الأوزان المستخدمة في الترجيح.

٢ ـ اسلوب المناسيب:

وفيه يحسب منسوب السعر لكل سلعة من السلع الداخلة في تركيب الرقم القياسي، ثم تجمع هذه المناسيب بطريقة ما، و يطلق على الرقم القياسي الذي يتم تركيبه بهذا الأسلوب «الرقم القياسي لمناسيب الأسعار».

وفي هذا الأسلوب يتم حساب الرقم القياسي للاسعار بإحدى الصيغتين الآتيتين:

(أ) صيغة المتوسط البسيط للمناسيب.
(ب) صيغة المتوسط المرجح للمناسيب.
وفيما يلي شرح لكل من هاتين الصيغتين.

(أ) المتوسط البسيط للمناسيب:

يتم حساب الرقم القياسي بصيغة المتوسط البسيط للمناسيب بحساب منسوب السعر (س) لكل سلعة. وذلك بقسمة سعرها في فترة المقارنة ($ع_١$) على سعرها في فترة الأساس ($ع_٠$) وضرب الناتج في ١٠٠، وبعد ذلك يتم تركيب الرقم القياسي باستخدام الوسط الحسابي أو الهندسي لهذه المناسيب فلو كان عدد السلع التي لدينا هي (ن) سلعة فإن:

$$\text{الرقم القياسى باستخدام الوسط الحسابى للمناسيب} = \frac{\sum س}{ن}$$

$$\text{الرقم القياسى باستخدام الوسط الهندسى للمناسيب} = \sqrt[ن]{س_١ \times س_٢ \times \cdots \times س_ن} \qquad (٧)$$

و يلاحظ أن الوسط الهندسي يعطي نتائج أكثر إعتدالا من الوسط الحسابي والرقم القياسي بصيغته الحالية علاوة على أنه يوضح التغير العام لأسعار السلع الداخلة في تركيبه، يمكن أيضاً من التعرف على التغير النسبي لكل سلعة على حدة وكذلك فإن هذه الصيغة تمكن من تركيب رقم قياسي بسيط للكميات بعد أن كان ذلك مستحيلا باستخدام الصيغة التجميعية البسيطة. إلا أنه يؤخذ عليه اشتراكه مع الرقم التجميعي البسيط في مساواته في الأهمية النسبية للسلع الداخلة في تركيبه حيث تظهر المناسيب في الرقم بأهمية واحدة. لذلك يكون من الأفضل ترجيح هذه المناسيب حسب أهمية السلع التي تمثلها.

(ب) المتوسط المرجح للمناسيب:

في حالة الرقم التجميعي المرجح للأسعار رجحنا أسعار السلع بكمياتها، بينما في حالة المتوسط المرجح لمناسيب الأسعار يكون الترجيح بقيم السلع (حاصل ضرب سعر كل سلعة في كميتها) وليس بكمياتها. ولما كان لدينا مجموعتان من الأسعار هما ($ع_{0}$)، ($ع_{1}$) ومجموعتان من الكميات هما ($ك_{0}$)، ($ك_{1}$) فإنه يصبح لدينا أربع مجموعات من القيم يمكن استخدامها كأوزان للترجيح وهي:

($ع_{0}$ $ك_{0}$) ، ($ع_{0}$ $ك_{1}$)

($ع_{1}$ $ك_{0}$) ، ($ع_{1}$ $ك_{1}$)

فإذا تم الترجيح بالقيمة ($ع_{0}.ك_{0}$) نحصل على الصيغة الآتية:

$$\frac{\sum \left[\frac{ع_{1}}{ع_{0}} \times ع_{0}\, ك_{0}\right]}{\sum ع_{0}\, ك_{0}} \times ١٠٠ \qquad \text{... ... ...} \quad (٨)$$

وبعد الاختصار تساوى

$$\frac{\sum ع_{1}\, ك_{0}}{\sum ع_{0}\, ك_{0}} \times ١٠٠$$

وهي نفس صيغة الرقم التجميعي للاسعار المرجح بكميات الأساس (رقم لاسبير للاسعار).

وإذا تم الترجيح بالقيمة ($ع_{0}.ك_{1}$) فإن الصيغة نكون:

$$\frac{\sum \left[\frac{ع_{1}}{ع_{0}} \times ع_{0}\, ك_{1}\right]}{\sum ع_{0}\, ك_{1}} \times ١٠٠ \qquad \text{... ... ...} \quad (٩)$$

$$= \frac{\sum ع_{1}\, ك_{1}}{\sum ع_{0}\, ك_{1}} \times ١٠٠$$

وهي نفس صيغة الرقم التجميعي للاسعار المرجح بكميات سنة المقارنة (رقم باشي للاسعار).
وكذلك الحال إذا كان الترجيح بالقيمة ($ع_١ ك_٠$) فإن الصيغة التي نحصل عليها تكون:

$$\frac{\sum \left[\frac{ع_١}{ع_٠} \times ع_١ ك_٠\right]}{\sum ع_١ ك_٠} \times ١٠٠ \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (١٠)$$

وإذا تم الترجيح بالقيمة ($ع_١ ك_١$) فإن الصيغة الناتجة تكون:

$$\frac{\sum \left[\frac{ع_١}{ع_٠} \times ع_١ ك_١\right]}{\sum ع_١ ك_١} \times ١٠٠ \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (١١)$$

و بالرغم من أن الأرقام القياسية التي حصلنا عليها في الصيغتين ٨، ٩ هما نفس صيغتي رقمي لاسبير و باشي السابق الحصول عليهما بالطريقة التجميعية إلا أن صيغة المتوسط المرجح للمناسيب تتميز عنهما بأنهما تمكننا من تعديل الرقم القياسي بإدخال مناسيب السلع الحديثة مكان السلع القديمة التي فقدت أهميتها علاوة على أنها توفر لنا المناسيب البسيطة لكل سلعة وهذا له فائدته الكبيرة عند التحليل.

مثال رقم (٣): باستخدام بيانات مثال رقم (٢) احسب:

أولا: الرقم القياسي للاسعار باستخدام.

(أ) المتوسط الحسابي البسيط للمناسيب.

(ب) المتوسط الهندسي البسيط للمناسيب.

ثانيا: الرقم القياسي للاسعار باستخدام:

(أ) المتوسط المرجح للمناسيب بالقيمة ($ع_٠ ك_٠$).

(ب) المتوسط المرجح للمناسيب بالقيمة ($ع_٠ ك_١$).

(جـ) المتوسط المرجح للمناسيب بالقيمة ($ع_١ ك_٠$).

(د) المتوسط المرجح للمناسيب بالقيمة ($ع_١ ك_١$).

الحل

نكون الجدول الآتي والذي يشمل على كافة البيانات اللازمة لحساب الأرقام القياسية المطلوبة.

السلع	ع.	ع١	ك.	ك١	ع. ك.	ع. ك١	ع١ ك.	ع١ ك١	س = ع١/ع. × ١٠٠	ع١/ع. × ع. ك.	ع١/ع. × ع. ك١	ع١/ع. × ع١ ك.	ع١/ع. × ع١ ك١
أ	٢	٣	١١	١٣	٢٢	٢٦	٣٣	٣٩	٣/٢ × ١٠٠ = ١٥٠	٣/٢ × ٢٢ = ٣٣	٣٩	٤٩,٥	٥٨,٥
ب	٥	٦	١٤	٣٠	٧٠	١٥٠	٨٤	١٨٠	٦/٥ × ١٠٠ = ١٢٠	٦/٥ × ٧٠ = ٨٤	١٨٠	١٠٠,٨	٢١٦,٠
ج	٨	٩	١	٣	٨	٢٤	٩	٢٧	٩/٨ × ١٠٠ = ١١٢,٥	٩/٨ × ٨ = ٩	٢٧	١٠,١	٣٠,٤
$\sum$					١٠٠	٢٠٠	١٢٦	٢٤٦	٣٨٢,٥	١٢٦	٢٤٦	١٦٠,٤	٣٠٤,٩

أولا: الرقم القياسي للأسعار باستخدام:

(أ) المتوسط الحسابي البسيط للمناسيب

$$= \frac{\sum س}{ن} = \frac{٣٨٢,٥}{٣} = ١٢٧,٥$$

(ب) المتوسط الهندسي البسيط للمناسيب

$$= \sqrt[ن]{س_1 \times س_2 \times ...... \times س_ن}$$

$$= \sqrt[3]{١٥٠ \times ١٢٠ \times ١١٢,٥}$$

$\therefore$ لو الرقم القياسي $= \frac{1}{3}$ (لو ١٥٠ + لو ١٢٠ + لو ١١٢,٥)

$= \frac{1}{3}$ (٢,١٧٦١ + ٢,٠٧٩٢ + ٢,٠٥١٠)

$= \frac{1}{3} \times$ ٦,٣٠٦٣ = ٢,١٠٢١

وبالكشف في جداول الاعداد المقابلة للوغاريتمات نجد أن:

الرقم القياسي = ١٢٦,٥

ثانيا: الرقم القياسي للأسعار باستخدام:

(أ) المتوسط المرجح للمناسيب بالقيمة ع.ك.

$$= \frac{\sum \left[\frac{ع_1}{ع_0} \times ع_0 ك_0 \right]}{\sum ع_0 ك_0} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٢٦}{١٠٠} \times ١٠٠$$

$$= ١٢٦$$

وهو نفس الرقم السابق حسابه باستخدام رقم لاسبير للأسعار.

(ب) المتوسط المرجح للمناسيب بالقيمة $ع_0 ك_1$

$$= \frac{\sum \left[\frac{ع_1}{ع_0} \times ع_0 ك_1 \right]}{\sum ع_0 ك_1} \times \text{١٠٠}$$

$$= \frac{\text{٢٤٦}}{\text{٢٠٠}} \times \text{١٠٠}$$

$$= \text{١٢٣}$$

وهو نفس الرقم السابق الحصول عليه باستخدام رقم باشي للأسعار

(جـ) المتوسط المرجح للمناسيب بالقيمة $ع_1 ك_0$.

$$= \frac{\sum \left[\frac{ع_1}{ع_0} \times ع_1 ك_0 \right]}{\sum ع_1 ك_0} \times \text{١٠٠}$$

$$= \frac{\text{١٦٠,٤}}{\text{١٢٦}} \times \text{١٠٠}$$

$$= \text{١٢٧,٣}$$

(د) المتوسط المرجح للمناسيب بالقيمة $ع_1 ك_1$

$$= \frac{\sum \left[\frac{ع_1}{ع_0} \times ع_1 ك_1 \right]}{\sum ع_1 ك_1} \times \text{١٠٠}$$

$$= \frac{\text{٣٠٤,٩}}{\text{٢٤٦}} \times \text{١٠٠}$$

$$= \text{١٢٣,٩}$$

و يلاحظ أننا حصلنا على نتائج مختلفة للرقم القياسي إلا أنها كلها تدل على نفس الاتجاه للتغير في الأسعار، وهذا الاختلاف يرجع إلى اختلاف الأوزان المستخدمة في الترجيح.

٦ ــ الأساس المتحرك :

اقتصرت دراستنا السابقة على الأرقام القياسية ذات الأساس الثابت أي التي تنسب فيها أسعار الفترات المختلفة إلى أسعار فترة معينة نختارها كأساس مهما بعدت هذه الفترة .

ونظراً للتغير السريع في الإنتاج وما يصاحبه من ظهور سلع حديثة في الأسواق باستمرار، الأمر الذي يؤدي إلى تغير أذواق المستهلكين و يؤثر على أنماط الاستهلاك لهم وكذلك يؤثر في الأهمية النسبية للسلع المختلفة، كل هذا يستوجب ضرورة إجراء مراجعة للسلع التي تدخل في تركيب الرقم القياسي وكذلك الأوزان التي تستخدم في الترجيح من وقت لآخر بحيث لا تظل فترة الأساس التي نختارها ثابتة لمدة طويلة من الزمن، بل تعدل لتتمشى مع التغيرات التي تكون قد طرأت على الإنتاج والتوزيع والعادات الاستهلاكية . وهذا يتحقق باتباع طريقة « الأرقام المتسلسلة » وفيها تقارن الأسعار في أي فترة زمنية بنظيراتها في الفترة السابقة لها مباشرة، فإذا ما أردنا مقارنة الأسعار في فترة معينة بفترة سابقة تبعد عنها عدة فترات فما علينا إلا أن نضرب الأرقام المتتالية حتى نصل إلى الفترة المطلوبة ثم نقسم حاصل الضرب على ١٠٠ن-١ (حيث ن تساوى عدد الأرقام المضروبة في بعضها) أو بمعنى آخر يمكن الوصول بصيغة الأساس المتحرك إلى الأساس الثابت .

فمثلا : إذا أخذنا رقم لاسبير للأسعار كمثال وفرضنا أن سعر السلعة في سنة الأساس ع. وسعرها في السنة الأولى هو $ع_{١}$ وسعرها في السنة الثانية هو $ع_{٢}$، وفي السنة الثالثة $ع_{٣}$ ، وهكذا الحال بالنسبة للكميات فإن :

رقم لاسبير للأسعار في السنة الثالثة بالنسبة للسنة الثانية « ونرمز له بالرمز $م_{٣٢}$ » .

$$= \frac{\sum ع_{٣}\, ك_{٢}}{\sum ع_{٢}\, ك_{٢}} \times ١٠٠$$

رقم لاسبير للأسعار في السنة الثانية بالنسبة للسنة الأولى « ونرمز له بالرمز $م_{٢١}$ » .

$$= \frac{\sum ع_{٢}\, ك_{١}}{\sum ع_{١}\, ك_{١}} \times ١٠٠$$

رقم لاسبير للأسعار في السنة الأولى بالنسبة لسنة الأساس « ونرمز له بالرمز $م_{١٠}$ »

$$= \frac{\sum ع_{١}\, ك_{.}}{\sum ع_{.}\, ك_{.}} \times ١٠٠$$

فإذا أردنا حساب الرقم القياسي للسنة الثالثة بالنسبة للسنة الأولى « $م_{٣١}$ »

فإننا نضرب $م_{٣٢} \times م_{٢١}$ ونقسم الناتج على ١٠٠ فيكون $م_{٣١} = \frac{م_{٣٢} \times م_{٢١}}{١٠٠}$

وكذلك الرقم القياسي للسنة الثالثة بالنسبة لسنة الأساس ($م_{٠٣}$) يكون :

$$م_{٠٣} = \frac{م_{٢٣} \times م_{١٢} \times م_{٠١}}{١٠٠ \times ١٠٠}$$

وبفرض أن الرقم القياسى للأسعار فى السنة الثالثة بالنسبة للسنة الثانية ($م_{٢٣}$) = ١٦٠ والرقم القياسى فى السنة الثانية بالنسبة للسنة الأولى ($م_{١٢}$) = ١٤٠ وفى السنة الأولى بالنسبة لسنة الأساس ($م_{٠١}$) = ١١٠

فإن الرقم القياسي للأسعار في السنة الثالثة بالنسبة للأساس ($م_{٠٣}$) =

$$\frac{م_{٢٣} \times م_{١٢} \times م_{٠١}}{١٠٠ \times ١٠٠}$$

$$= \frac{١٦٠ \times ١٤٠ \times ١١٠}{١٠٠ \times ١٠٠}$$

$$= ٢٤٦,٤$$

ومن الطبيعي أن الرقم المحسوب بهذه الطريقة يختلف عن مثيله المحسوب باستخدام الأساس الثابت مباشرة.

والهدف من استخدام الأساس المتحرك في حساب الأرقام القياسية، هو إعطاء الرقم المرونة اللازمة وذلك باضافة سلع جديدة تكون قد اكتسبت أهمية وإخراج سلع قديمة تكون قد فقدت أهميتها وكذلك بتعديل الأوزان التي تستخدم في ترجيح السلع الداخلة في تركيب الرقم القياسي، وهذا يعني أننا نأخذ في الاعتبار التغيرات الأساسية في الإنتاج والتوزيع والعادات الاستهلاكية، بعكس الحال في حالة الأرقام القياسية ذات الأساس الثابت. إلا أنه يؤخذ على الأرقام القياسية المحسوبة لأساس متحرك أنها لا تقارن الأسعار في أي فترة زمنية إلا بنظيرتها في الفترة السابقة لها مباشرة، علاوة على أن استمرار إدخال سلع جديدة وإخراج سلع أخرى قديمة يفقد الرقم القياسي قيمته ومدلوله على مر السنين.

مثال عام

الجدول الآتي يبين متوسط أسعار بعض السلع المهمة والكميات المستهلكة منها في سنتي ١٩٦٨، ١٩٧٢.

السلعة	متوسط الأسعار بالريالات		الكمية المستهلكة بآلاف الأطنان	
	١٩٦٨	١٩٧٢	١٩٦٨	١٩٧٢
أ	٦	٨	١٥	١٢
ب	٣٠	٣٤	٤	٦
حـ	٤	٦	٢٠	٢٤
د	١٥	٢٠	١٦	١٦
هـ	٢٠	٢٢	١٨	٢٠

باعتبار سنة ١٩٦٨ كأساس أوجد:

١ــ الرقم التجميعي البسيط للأسعار

٢ــ الرقم القياسي الأمثل للأسعار.

٣ــ الرقم القياسي للأسعار باستخدام المتوسط الحسابي البسيط للمناسيب.

٤ــ الرقم القياسي للأسعار باستخدام المتوسط الهندسي البسيط للمناسيب.

٥ــ الرقم القياسي للأسعار باستخدام المتوسط المرجح للمناسيب.

الحل

نكون الجدول الآتي والذي يشمل على كافة البيانات اللازمة لحساب الأرقام القياسية المطلوبة

السلع	$ع_0$	$ع_1$	$ك_0$	$ك_1$	$ع_0 ك_0$	$ع_0 ك_1$	$ع_1 ك_0$	$ع_1 ك_1$
أ	٦	٨	١٥	١٢	٩٠	٧٢	١٢٠	٩٦
ب	٣٠	٣٤	٤	٦	١٢٠	١٨٠	١٣٦	٢٠٤
حـ	٤	٦	٢٠	٢٤	٨٠	٩٦	١٢٠	١٤٤
د	١٥	٢٠	١٦	١٦	٢٤٠	٢٤٠	٣٢٠	٣٢٠
هـ	٢٠	٢٢	١٨	٢٠	٣٦٠	٤٠٠	٣٩٦	٤٤٠
مج	٧٥	٩٠			٨٩٠	٩٨٨	١٠٩٢	١٢٠٤

(تابع)

$س = \frac{ع_1}{ع_.} \times ١٠٠$	$\frac{ع_1}{ع_.} \times ع_. ك_.$	$\frac{ع_1}{ع_.} \times ع_. ك_1$	$\frac{ع_1}{ع_.} \times ع_1 ك_.$	$\frac{ع_1}{ع_.} \times ع_1 ك_1$
$\frac{٨}{٦} \times ١٠٠ = ١٣٣,٣$	$\frac{٨}{٦} \times ٩٠ = ١٢٠$	$\frac{٨}{٦} \times ٧٢ = ٩٦$	$\frac{٨}{٦} \times ١٢٠ = ١٦٠$	$\frac{٨}{٦} \times ٩٦ = ١٢٨$
$\frac{٣٤}{٣٠} \times ١٠٠ = ١١٣,٣$	$\frac{٣٤}{٣٠} \times ١٢٠ = ١٣٦$	$\frac{٣٤}{٣٠} \times ١٨٠ = ٢٠٤$	$\frac{٣٤}{٣٠} \times ١٣٦ = ١٥٤,١$	$\frac{٣٤}{٣٠} \times ٢٠٤ = ٢٣١,٢$
$\frac{٦}{٤} \times ١٠٠ = ١٥٠$	$\frac{٦}{٤} \times ٨٠ = ١٢٠$	$\frac{٦}{٤} \times ٩٦ = ١٤٤$	$\frac{٦}{٤} \times ١٢٠ = ١٨٠$	$\frac{٦}{٤} \times ١٤٤ = ٢١٦$
$\frac{٢٠}{١٥} \times ١٠٠ = ١٣٣,٣$	$\frac{٢٠}{١٥} \times ٢٤٠ = ٣٢٠$	$\frac{٢٠}{١٥} \times ٢٤٠ = ٣٢٠$	$\frac{٢٠}{١٥} \times ٣٢٠ = ٤٢٦,٧$	$\frac{٢٠}{١٥} \times ٣٢٠ = ٤٢٦,٧$
$\frac{٢٢}{٢٠} \times ١٠٠ = ١١٠$	$\frac{٢٢}{٢٠} \times ٣٦٠ = ٣٩٦$	$\frac{٢٢}{٢٠} \times ٤٠٠ = ٤٤٠$	$\frac{٢٢}{٢٠} \times ٣٩٦ = ٤٣٥,٦$	$\frac{٢٢}{٢٠} \times ٤٤٠ = ٤٨٤$
٦٣٩,٩	١٠٩٢	١٢٠٤	١٣٥٦٤	١٤٨٥,٩

١ـ الرقم التجميعي البسيط للأسعار $= \frac{\sum ع_1}{\sum ع_0} \times ١٠٠$

$= \frac{٩٠}{٧٥} \times ١٠٠ = ١٢٠$

أي أن الأسعار قد زادت في المتوسط عام ١٩٧٢ بمقدار ٢٠٪ عما كانت عليه عام ١٩٦٨ .

٢ـ الرقم القياسي الأمثل $= \sqrt{\frac{\sum ع_1 ك_0}{\sum ع_0 ك_0} \times \frac{\sum ع_1 ك_1}{\sum ع_0 ك_1}} \times ١٠٠$

$= \sqrt{\frac{١٠٩٢}{٨٩٠} \times \frac{١٢٠٤}{٩٨٨}} \times ١٠٠$

$= ١٢٢,٣$

أي أن الأسعار زادت في المتوسط عام ١٩٧٢ بمقدار ٢٢,٣٪ عما كانت عليه عام ١٩٦٨ .

٣ـ الرقم القياسي للأسعار باستخدام المتوسط الحسابي البسيط للمناسيب

$= \frac{\sum س}{ن} \times ١٠٠ = \frac{٦٣٩,٩}{٤} = ١٢٧,٨$

٤ـ الرقم القياسي للأسعار باستخدام المتوسط الهندسي البسيط للمناسيب

$= \sqrt[ن]{س_1 \times س_2 \times \cdots\cdots \times س_ن}$

$= \sqrt[٥]{١٣٣,٣ \times ١١٣,٣ \times ١٥٠ \times ١٣٣,٣ \times ١١٠}$

$\therefore$ لو الرقم $= \frac{١}{٥}$ (لو ١٣٣,٣ + لو ١١٣,٣ + لو ١٥٠ + لو ١٣٣,٣ + لو ١١٠)

$= \frac{١}{٥} \times ١٠,٥٢١٥$

$= ٢,١٠٤٣$

و بالكشف في جداول الأعداد المقابلة للوغاريتمات نجد أن الرقم القياسي = ١٢٧,٢ .

٥ـ الرقم القياسي للأسعار باستخدام المتوسط المرجح للمناسيب .

(أ) الرقم القياسي للأسعار باستخدام المتوسط المرجح للمناسيب بالقيمة (ع. ك.) .

$= \frac{\sum \left[\frac{ع_1}{ع_0} \times ع_0 ك_0\right]}{\sum ع_0 ك_0} \times ١٠٠ = \frac{١٠٩٢}{٨٩٠} \times ١٠٠$

$$= ١٢٢,٧$$

(ب) الرقم القياسي للأسعار باستخدام المتوسط المرجح للمناسيب بالقيمة ($\text{ع}_٠ \text{ك}_١$).

$$= \frac{\sum \left(\frac{\text{ع}_١}{\text{ع}_٠} \times \text{ع}_٠ \text{ك}_١ \right)}{\sum \text{ع}_٠ \text{ك}_١} \times ١٠٠ = \frac{١٢٠٤}{٩٨٨} \times ١٠٠$$

$$= ١٢١,٩$$

(جـ) الرقم القياسي للأسعار باستخدام المتوسط المرجح للمناسيب بالقيمة ($\text{ع}_١ \text{ك}_٠$).

$$= \frac{\sum \left(\frac{\text{ع}_١}{\text{ع}_٠} \times \text{ع}_١ \text{ك}_٠ \right)}{\sum \text{ع}_١ \text{ك}_٠} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٣٥٦,٤}{١٠٩٢} \times ١٠٠ = ١٢٤,٢$$

(د) الرقم القياسي للأسعار باستخدام المتوسط المرجح للمناسيب بالقيمة ($\text{ع}_١ \text{ك}_١$):

$$= \frac{\sum \left(\frac{\text{ع}_١}{\text{ع}_٠} \times \text{ع}_١ \text{ك}_١ \right)}{\sum \text{ع}_١ \text{ك}_١} \times ١٠٠$$

$$= \frac{١٤٨٥,٩}{١٢٠٤} \times ١٠٠ = ١٢٣,٤$$

هذا و يلاحظ أننا حصلنا على نتائج مختلفة للرقم القياسي إلا أنها كلها تدل على نفس الاتجاه للتغير في الأسعار، وهذا الاختلاف في النتائج إنما يرجع إما لاختلاف أسلوب تركيب الرقم أو لاختلاف الأوزان المستخدمة في الترجيح.

تمارين

١ ــ (أ) ماهو الرقم القياسي، وما هو الغرض من حسابه ؟

(ب) اشرح الأسس التي يجب أخذها في الاعتبار عند اختيار فترة الأساس .

٢ ــ فيما يلي بيان بأسعار بعض السلع الهامة في عامي ١٩٦٥، ١٩٧٠، وكذلك الكميات المنتجة منها:

السلعة	الأسعار بالريال		الكميات بالطن	
	١٩٦٥	١٩٧٠	١٩٦٥	١٩٧٠
ا	٥٠	٧٢٥	٦٠	١٢٠
ب	٢٦	٤٤٠	٨	٥٠
حـ	٥٨	١١٥٠	٢٠	١٩

والمطلوب:

باعتبار أن سنة ١٩٦٥ سنة أساس حساب :

أ ــ الرقم التجميعي البسيط للأسعار.

ب ــ الرقم التجميعي للأسعار المرجح بكميات سنة الأساس .

جـ ــ الرقم التجميعي للأسعار المرجح بكميات سنة المقارنة .

د ــ الرقم القياسي الأمثل لفيشر.

٣ ــ البيانات الآتية تبين أسعار وكميات بعض السلع في عامي الأساس والمقارنة .

السلعة	أسعار الأساس	أسعار المقارنة	كميات الأساس	كميات المقارنة
ا	٢٥	٢٠	٢٠٠	٣٠٠
ب	٦٠	٤٠	١٥٠	١٠٠
حـ	٣٥	٣٠	٢٠	٤٠

والمطلوب حساب الأرقام القياسية للأسعار بطريقة المناسيب باستخدام المتوسطات البسيطة والمرجحة التي تعرفها .

٤ ـ الجدول الآتي يبين متوسط أسعار بعض السلع والكميات المستهلكة منها في عامي ١٩٦٩ ، ١٩٧٢ .

السلعة	١٩٧٢		١٩٦٩	
	السعر	الكمية	السعر	الكمية
الأولى	٥	٤٠	٣	٣٠
الثانية	٧	٣٠	٤	٢٠
الثالثة	١	٢٠	٣	١٠

والمطلوب :

باعتبار أن سنة ١٩٦٩ سنة أساس حساب :

أ ـ الرقم التجميعي للأسعار المرجح بكميات سنة المقارنة .

ب ـ الرقم القياسي الأمثل للأسعار (رقم فيشر للأسعار) .

جـ ـ الرقم القياسي للأسعار باستخدام المتوسط المرجح للمناسيب .

٥ ـ الجدول الآتي يبين أسعار بعض السلع والكميات المستهلكة منها عامي ١٩٦٥ ، ١٩٧٠ .

السلعة	١٩٦٥		١٩٧٠	
	السعر	الكمية	السعر	الكمية
ا	٣	٣٠	٥	٤٠
ب	٤	٢٠	٧	٣٠
حـ	٣	١٠	١	٢٠

والمطلوب باعتبار أن سنة ١٩٦٥ سنة أساس :

أ ـ حساب الرقم التجميعي البسيط للأسعار .

ب ـ حساب الرقم التجميعي للأسعار المرجح بكميات سنة الأساس (رقم لاسبير للأسعار) .

جـ ـ حساب الرقم القياسي الأمثل للأسعار (رقم فيشر للأسعار)

٦ ـ الجدول الآتي يوضح أسعار الجملة لبعض المواد الغذائية المستوردة في الفترة من عام ١٩٧٠ حتى عام ١٩٧٣ .

السنة	الفول	الدقيق	الأرز	الذرة
١٩٧٠	٣٠٠	٣٧٥	٥٢٠	٢٥٠
١٩٧١	١٥٠	٣٧٥	٦٢٥	٢٧٠
١٩٧٢	٢٤٠	٤٠٠	٦٦٠	٣٠٠
١٩٧٣	٣٢٠	٤١٠	٧٣٠	٣٥٠

والمطلوب حساب رقم قياسي لأسعار الجملة في كل سنة بالنسبة للسنة السابقة لها باستخدام طريقة الأساس المتحرك، ثم استنتج الرقم القياسي لأسعار الجملة في عام ١٩٧٣ بالنسبة لعام ١٩٧٠ كأساس.

الباب الثامن

الاحصاءات الحيوية



الاحصاءات الحيوية

الإحصاءات الحيوية هي الإحصاءات التي تتناول الوقائع المتعلقة بحياة الفرد منذ ولادته وحتى وفاته. وهي بذلك تشمل كافة ما يتعلق بحالة السكان وتكوينهم وحركتهم والحوادث الهامة التي تقع لهم، وهذا يتمثل في تعدادات السكان وإحصاءات المواليد والوفيات والزواج والطلاق والهجرة.

و يتم الحصول على بيانات هذه الإحصاءات بحكم قوانين تضعها الدولة و يلتزم الأفراد بموجبها بالإدلاء بالمعلومات التي تتعلق بأي من هذه الأحداث في أوقات معينة للجهات التي تحددها الدولة.

وستقتصر دراستنا في هذا الباب على:

- تعدادات السكان.
- إحصاءات المواليد.
- إحصاءات الوفيات.
- تقدير السكان بين سنوات التعداد.

أولا ــ تعداد السكان

١ ــ مقدمة:

يرجع اهتمام الدول بعمل تعدادات السكان إلى عهد بعيد، وقديماً كانت التعدادات تقتصر على معرفة عدد السكان حتى تستفيد منها الدول في معرفة قوتها البشرية في الحروب وفي جباية الضرائب. وكان هذا العد يجري بدون طريقة علمية ثابتة و بغير تاريخ محدد. إلا أن فكرة التعداد بتنظيماته الحديثة لم تظهر قبل القرن ١٧ وتحسنت كثيراً في القرن ١٩. وقد قامت انجلترا بعمل تعدادات منتظمة كل عشر سنوات ابتداء من عام ١٧٠١ إلى الوقت الحاضر وتبعتها السويد في عام ١٧٥١ والولايات المتحدة الأمريكية في عام ١٧٩٠، وكذلك قامت مصر بإجراء أول تعداد على الأسس الحديثة عام ١٨٨٢ وتلاه تعداد آخر عام ١٨٩٧، ومنذ ذلك التاريخ تتم تعدادات السكان مرة كل عشر سنوات.

ونظرا لأهمية تعدادات السكان في الوقت الحالي حيث أنها تعطي وصفاً عاماً للسكان من حيث التركيب العمري والنوعي والمهني والحالة التعليمية والصحية.. إلخ، وغير ذلك من البيانات التي تستعين بها الحكومات في التعرف على سكانها. وقد قامت بعمل التعدادات في السنوات العشر

الأخيرة أكثر من ١٥٠ دولة، وتقوم أجهزة الأمم المتحدة المتخصصة بتقديم الخبرة الفنية للبلاد المختلفة وخاصة البلاد النامية لتمكنها من إجراء التعداد بطريقة دقيقة وسليمة .

٢ـ تعريف التعداد:

يقصد بتعداد السكان «عدد الأشخاص الموجودين على قيد الحياة داخل حدود بلد معين في لحظة معينة من تاريخ محدد، مع تسجيل خصائصهم الحيوية والاقتصادية والاجتماعية في هذه اللحظة» .

و يعبر عن التعداد بلحظة معينة وليس عن فترة زمنية . فمثلا، نجد أن تعداد السكان في أي دولة يجري عن ليلة معينة في شهر اكتوبر مثلا وليس عن شهر اكتوبر كله .

و يقصد بالتواجد داخل حدود بلد معين، التواجد في هذا البلد، سواء بصفة دائمة كأن يكون من سكان البلد أنفسهم، أو بصفة مؤقتة (عارضة) مثل الزوار والسائحين . . إلخ .

٣ـ أسس اجراء التعداد:

تجرى تعدادات السكان بإحدى الأسس الآتية :

(أ) الأساس الفعلي .　　　(ب) الأساس النظري .

وفيما يلي شرح مختصر لكل منهما :

(أ) الأساس الفعلي:

وفيه يتم حصر الأشخاص في مكان وجودهم ليلة التعداد بصرف النظر عن كونهم من سكان هذا المكان بصفة دائمة أو زائرين بصفة مؤقتة .

فمثلا : الأشخاص المقيمون بفندق ليلة التعداد يعدون ضمن سكان المدينة الموجودين بهذا الفندق حتى ولو كانوا غير مقيمين أصلا في هذه المدينة و وجودهم بها كان بسبب طارىء . ومن أمثلة البلاد التي تجري تعداداتها على هذا الأساس المملكة المتحدة ومصر.

ويمتاز هذا الأساس : بالسهولة والبساطة سواء بالنسبة لجامع البيان أو معطى البيان . علاوة على عدم تعرض جامعي البيان للخطأ عند إجراء عملية حصر السكان.

(ب) الأساس النظري:

وفيه يتم حصر الأشخاص حسب محل إقامتهم المعتاد. فأفراد الأسرة الغائبين عنها لسبب طارىء ليلة التعداد يقيدون مع الأسرة، كما يستبعد من أفراد الأسرة الزائرون والضيوف الذين يتواجدون معها ليلة التعداد. ومن أمثلة الدول التي تجري تعداداتها على هذا الأساس الولايات المتحدة الأمريكية وكندا وألمانيا .

ويمتاز هذا الأساس بأنه يعطي صورة صحيحة عن السكان الدائمين بكل منطقة، وهذا له مزاياه العديدة في مشروعات التخطيط الاقتصادي والاجتماعي.

٤ـ اغراض التعداد:

تطورت الاستفادة من تعدادات السكان، فبعد أن كان الهدف الوحيد لها في الأزمنة القديمة هو معرفة عدد السكان بقصد التعرف على قوة الدولة الحربية أو لأغراض جباية الضرائب، أصبحت في القرن الحالي بصفة خاصة تستخدم ـ علاوة على معرفة عدد السكان ـ في معرفة توزيع السكان حسب الخصائص الديموجرافية والاجتماعية والاقتصادية وغيرها، وكذلك في إعطاء صورة واضحة لحالة السكان من جميع هذه النواحي من وقت لآخر، مما يساعد الدولة على تخطيط الخدمات المختلفة على أسس علمية سليمة في مختلف المناطق.

ويمكن تلخيص أوجه الاستفادة من بيانات التعداد في النواحي الآتية:

(أ) عدد السكان وتوزيعهم الجغرافي:

يقصد بعدد السكان لأي دولة في تاريخ معين. عدد الأشخاص الموجودين على قيد الحياة في هذا التاريخ داخل حدود الدولة سواء كانوا من مواطني هذه الدولة أو كان وجودهم فيها بصفة عارضة.

و يفيد بيان عدد السكان وتوزيعهم الجغرافي داخل حدود الدولة في معرفة:

$$(١) \quad \text{كثافة السكان} = \frac{\text{عدد السكان فى الدولة}}{\text{مساحة الدولة كم}^2}$$

وهذا المقياس يدل على درجة إزدحام الدولة بالسكان.

ولكن يجب الحذر عند استخدام هذا المقياس في المقارنة بين دولتين إحداهما مأهولة بالسكان والأخرى صحراوية، إذ يجب استبعاد المساحة الغير مأهولة بالسكان في الدولة الثانية حتى تكون المقارنة سليمة.

$$(٢) \quad \text{كثافة السكن} = \frac{\text{عدد السكان فى الدولة}}{\text{عدد حجرات المساكن}}$$

وهذا المقياس يوضح درجة الازدحام داخل المسكن، وله أهميته في الأبحاث الصحية والاجتماعية.

(٣) معدل زيادة السكان من تعداد لآخر، و يستخدم لتقدير عدد السكان في غير سنوات التعداد، وسنعود لشرحه بالتفصيل عند الكلام على تقدير السكان بين سنوات التعداد.

(ب) التركيب العمري والنوعي للسكان:

(١) التركيب العمري للسكان: و يقصد به توزيع السكان حسب فئات السن. وهذا البيان مهم للغاية لأنه يكشف عن المعالم الهامة للمجتمع فهو يبين حجم قوة العمل وأعباء الإعالة التي يلقيها الأطفال والشيوخ على السكان المنتجين وعلى الدولة، فوجود نسبة كبيرة من السكان في سن الطفولة أو الشيخوخة يؤثر في القوة الإنتاجية والكفاية الاقتصادية للدولة بعكس الحال إذا كانت نسبة الشباب هي الغالبة، إذ أن كلا من هذه الفئات الثلاث لها احتياجاتها الخاصة من السلع الاستهلاكية والخدمات على اختلاف أنواعها صحية وتعليمية وإجتماعية. إلخ، وتبعاً لتغير توزيع أعمار السكان تتغير هذه الاحتياجات، ولذلك يلزم تتبع التغيرات التي تطرأ على هذا التوزيع عند دراسة الخصائص الاقتصادية والاجتماعية للسكان.

وتفيد دراسة التركيب العمري للسكان في:

- معرفة الإتجاه السكاني العام وتقدير السكان في المستقبل.
- دراسة الخصوبة ونتائجها واتجاهاتها.
- حساب معدلات الوفيات وجداول الحياة.
- تقدير حجم القوى العاملة اللازمة لعمليات التنمية والدفاع.
- الوقوف على مشكلات التعليم والتأمين الصحي والضمان الاجتماعي.
- تقدير نسبة الشيوخ والأطفال والشباب واستخدامها في تقدير عبء الإعالة الذي تضطلع به فئة السكان في سن العمل، إذ من الواضح أن هذا العبء يرتفع في المجتمعات النامية نتيجة زيادة الأطفال.

وتبوب البيانات الخاصة بأعمار السكان عادة في فئات خمسية (ـــ، ٥ـــ، ١٠ـــ، ..إلخ) وتمثل بيانياً في مدرج تكراري أو على صورة هرم سكاني وهو شكل هندسي يعطي فكرة عن التركيب العمري والنوعي للسكان.

(٢) التركيب النوعي للسكان: و يقصد به توزيع السكان إلى ذكور وإناث. وهذا البيان له اهميته عند بحث الحالة الاجتماعية للسكان، فنسبة الإناث إلى الذكور تتفاوت من دولة لأخرى كذلك تختلف في فئات السن المختلفة داخل البلد الواحد. والتركيب النوعي للسكان يعطي فكرة عن مستقبل النمو السكاني للدولة لأن هذا النمو يعتمد على الإناث في سن معينة وهي سن الحمل.

(جـ) الحالة التعليمية:

معرفة بيانات الحالة التعليمية للسكان مهمة للغاية لأنها تؤثر في رسم السياسة التعليمية للدولة من حيث إنشاء المدارس في مراحل التعليم وفي المناطق المختلفة وكذلك توفير المدرسين اللازمين لهذه المدارس والعمل على تنمية القوى البشرية للمساهمة في تنفيذ خطط التنمية، كما تساعد الدولة في

إعداد خطط مكافحة الأمية للشعب على أسس سليمة بعد معرفة حقيقة عدد الأميين ونسبتهم إلى المتعلمين. و بالاضافة إلى ما سبق تستفيد الدولة من بيانات الحالة التعليمية في حصر الكفايات العلمية لديها للاستفادة بها في تخطيط برامج التنمية.

(د) الجنسية:

يفيد بيان الجنسية الدولة في عدة نواحي أهمها:

- معرفة عدد الأجانب وخصائصهم من حيث النوع والسن، ومعرفة الهجرة إلى البلاد وفي أي مرحلة من مراحل السن تكون هذه الهجرة.
- معرفة مدى مساهمة المهاجرين في قوة العمل، وفي أي الأنشطة تكون هذه المساهمة أكبر من غيرها.
- دراسة مسائل الأمن الداخلي وتنظيم رعاية الأجانب.
- تتبع التغير في عدد وأوضاع الأجانب من تعداد لآخر.

(هـ) الحالة الزواجية:

بيانات الحالة الزواجية هامة بالنسبة للدولة لأنها تساعد على معرفة اتجاهات الخصوبة ودرجة النمو السكاني وكذلك مدى الإقبال أو الإحجام عن الزواج في فئات السن المختلفة وكذلك معرفة مدى التغير في متوسط سن الزواج. كما يفيد هذا البيان في تقدير الاحتياجات من المساكن والسلع الاستهلاكية والخدمات الأخرى، هذا علاوة على أن معرفة عدد المطلقات والأرامل يؤدي إلى التعرف على المشاكل الاجتماعية لهن و يساعد على وضع الحلول المناسبة لها.

(و) الحالة الاقتصادية للسكان:

و يقصد بها النشاط الاقتصادي والمهنة والحالة العملية للسكان. و بصفة عامة يمكن تقسيم السكان من الناحية الاقتصادية إلى قسمين رئيسيين:

(أ) القوى البشرية.

(ب) خارج القوى البشرية.

والقوى البشرية: هي ذلك الجزء من السكان الذي يمكن استغلاله في النشاط الاقتصادي، و يشمل السكان من سن ١٥ إلى ٦٥ سنة والقوى البشرية تنقسم بدورها إلى قوة العمل وخارج قوة العمل.

أما خارج القوى البشرية: فهم الأفراد الغير قادرين على العمل مثل الأطفال ـ كبار السن ـ العجزة الذين لايمكنهم أداء عمل مثمر يسبب عاهات مقعدة أو أمراض مزمنة.

وتفيد بيانات الحالة الاقتصادية في النواحي الآتية :

ــ تعطي صورة واضحة لهيكل النشاط الاقتصادي في الدولة .

ــ معرفة القوى العاملة وتوزيعها على المهن المختلفة في المناطق الجغرافية وكذلك معرفة عدد المشتغلين والمتعطلين في الأنشطة المختلفة .

ــ دراسة توطن الصناعة ومقوماتها .

ــ تحديد نسبة القوى العاملة المشتغلة في قطاع معين ــ الزراعة مثلا ــ إلى مثيلتها المشتغلة في القطاعات الأخرى .

ــ استخراج بعض المؤشرات والمعدلات الهامة ، مثل معدل النشاط الاقتصادي وهو يساوى

$$= \frac{\text{عدد المتكسبين}}{\text{عدد السكان}} \times ١٠٠٠$$

و يعرف المتكسب بأنه الشخص الذي له نشاط اقتصادي أو الشخص الموجود داخل سوق العمل أو الشخص الذي يبذل مجهوداً في سبيل إنتاج سلعة أو خدمة داخل سوق العمل .

وهذا المعدل يختلف حسب القطاعات الاقتصادية والأعمار والنوع والتقاليد ومستوى التقدم الصناعي .

٥ ــ خاتمة :

من العرض السابق نجد أن تعداد السكان يعتبر من أهم عناصر الإحصاءات السكانية حيث يعتبر نقطة الارتكاز في هذه الاحصاءات ، فهو يصور السكان من حيث العدد والخصائص المختلفة في لحظة معينة . وحيث أن السكان يتصفون بالحركة المستمرة لذلك نجد أن بيانات التعداد تمثل اللحظة التي يجمع عنها فقط ، بمعنى أنه بعد تاريخ التعداد تحدث ولادات و وفيات وزيجات وطلاق وتغير في المهن والأنشطة الاقتصادية والحالة التعليمية والعملية .. إلخ ، أي باختصار تختلف صورة وتكو ين المجتمع ، وعلى ذلك إذا كنا سنعتمد على تعدادات السكان فقط فهذا يعني أننا سننتظر عشر سنوات أخرى حتى يحل موعد إجراء تعداد آخر ، لذلك نجد أن المسئولين عن التخطيط في الدول يعتمدون على التعدادات كنقطة إرتكاز لمعرفة صورة واضحة عن المجتمع في لحظة التعداد ثم يعتمدوا في الفترة بعد سنوات التعداد على العديد من الإحصاءات ذات الدورة القصيرة والتي غالباً ما تكون سنو ية لمعرفة التغيرات التي تطرأ على السكان منذ تاريخ التعداد .

والاحصاءات التي تؤثر في حركة السكان هي إحصاءات المواليد والوفيات والزواج والطلاق والهجرة . وفي مجالنا هذا سنتناول بالشرح إحصاءات المواليد والوفيات فقط ثم نعطي فكرة عن كيفية تقدير عدد السكان بين سنوات التعداد .

ثانيا ـ احصاءات المواليد

مقدمة:

تعتبر إحصاءات المواليد إحدى الركائز الأساسية في مجال الإحصاءات الحيوية إذ تمثل عنصراً هاماً ورئيسياً في معرفة حركة السكان زيادة ونقصاً، كما تدخل كعنصر أساسي في تقدير عدد السكان في سنوات ما بين التعداد. ولذلك تحتم قوانين غالبية الدول على ضرورة تسجيل المواليد رسمياً خلال مدة معينة من وقت الولادة، وتقوم الجهات المسئولة عن الإحصاء في الدولة بإعداد الإحصاءات الخاصة بالمواليد إجمالا على مستوى الدولة وتفصيلا على مستوى المناطق الجغرافية وعلى مستوى النوع (ذكور وإناث) في شهور السنة وذلك لمعرفة أي فصول السنة تكثر فيها المواليد عن غيرها.

والبيانات التي يتم تسجيلها عن كل مولود تختلف من دولة لأخرى حسب درجة إنتشار الوعي الإحصائي والتعليم والثقافة والتقاليد والعادات، وإن كانت البيانات الأساسية اللازم تسجيلها عن كل مولود لا تخرج عن:

ـ تاريخ الميلاد	ـ اسم المولود	ـ الجنس
ـ الجنسية	ـ محل الميلاد	ـ المولود حي أو ميت
ـ اسم الأب ومهنته	ـ اسم الأم	ـ الديانة للأب والأم

وإحصاءات المواليد تستخدم في حساب الكثير من المعدلات الهامة التي تستخدم كمقاييس إحصائية في مجالات الدراسات السكانية، نذكر منها على سبيل المثال المعدلات الإجمالية الآتية:

(أ) معدل المواليد الخام:

وهومعدل أولى وتقريبي، و يساوي:

$$\frac{\text{عدد المواليد أحياء فى البلد أثناء السنة}}{\text{عدد السكان فى منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

و يتم الحصول على بيان عدد المواليد أحياء أثناء السنة من واقع احصاءات المواليد، أما عدد السكان فيتم الحصول عليه إما من تعداد السكان أو بإحدى طرق تقدير السكان بين سنوات التعداد (والتي سيجيء شرحها فيما بعد).

و يعاب على هذا المعدل أنه يأخذ في حسابه جميع السكان دون اعتبار النوع أو السن وهو بذلك

لايعطي مقياساً حقيقياً وصحيحاً لحالة الخصوبة الحقيقية للسكان، إذ من المعروف أن عدد المواليد في أي بلد لايتوقف على عدد الأطفال والشيوخ بل على عدد النساء اللاتي في سن الحمل دون باقي السكان.

(ب) معدل الخصوبة العام:

وهذا المعدل يدخل في حسابه عدد النساء في سن الحمل (١٥ـ ٥٠) سنة فقط دون باقي السكان، وهوبذلك يتلافى العيوب التي تؤخذ على معدل المواليد الخام، و يساوى:

$$\frac{\text{عدد المواليد أحياء فى البلد أثناء السنة}}{\text{عدد النساء فى سن الحمل (١٥ ــ ٥٠ سنة)}} \times ١٠٠٠$$

إلا أن هذا المعدل يؤخذ عليه أيضاً أن النساء في سن الحمل لسن كلهن متزوجات، لذلك فالأفضل استبعاد النساء غير المتزوجات وفي سن الحمل من حساب المعدل.

(جـ) معدل التوالد:

وهذا المعدل يأخذ في اعتباره عدد النساء في سن الحمل والمتزوجات فقط دون باقي النساء، وهو بذلك يتلافى العيوب التي تؤخذ على معدل الخصوبة العام، و يساوى:

$$\frac{\text{عدد المواليد أحياء فى البلد أثناء السنة}}{\text{عدد النساء المتزوجات فى سن الحمل}} \times ١٠٠٠$$

ومما لاشك فيه أن هذا المعدل أدق من معدل الخصوبة العام وأكثر منه واقعية ومنطقاً.

و يلاحظ أننا أخذنا في حساب المعدلات السابقة عدد المواليد أحياء دون المواليد موتى، وهذا أمر طبيعي إذ أن المواليد موتى لا تؤثر على نمو السكان وإن كانت تعطي مؤشراً هاماً عن الحالة الصحية للأمهات ومقدار الرعاية الصحية والطبية التي تقدم لهن أثناء مدة الحمل.

مثال (١): البيانات الآتية خاصة بإحدى الدول عام ١٩٦٠ «بالمليون»

عدد المواليد أحياء	عدد النساء فى سن الحمل	عدد النساء المتزوجات فى سن الحمل	تقدير عدد السكان (فى منتصف السنة)
١,١	٥,٣	٤,٢	٢٦.١

والمطلوب حساب:

١ ــ معدل المواليد الخام.

٢ ــ معدل الخصوبة العام.

٣ ــ معدل التوالد.

الحل

$$\text{١ ــ معدل المواليد الخام} = \frac{\text{عدد المواليد أحياء فى الدولة أثناء السنة}}{\text{عدد السكان فى منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

$$= \frac{١٠١}{٢٦٠١} \times ١٠٠٠ = ٤٢,١٥ \text{ ٪..}$$

$$\text{٢ ــ معدل الخصوبة العام} = \frac{\text{عدد المواليد أحياء فى الدولة أثناء السنة}}{\text{عدد النساء فى سن الحمل (١٥ ــ ٥٠ سنة)}} \times ١٠٠٠$$

$$= \frac{١,١}{٥,٣} \times ١٠٠٠ = ٢٠٧,٥٥ \text{ ٪.}$$

$$\text{٣ ــ معدل التوالد} = \frac{\text{عدد المواليد أحياء فى الدولة أثناء السنة}}{\text{عدد النساء المتزوجات فى سن الحمل}} \times ١٠٠٠$$

$$= \frac{١,١}{٤,٢} \times ١٠٠٠ = ٢٦١,٩٠ \text{ ٪..}$$

ثالثاً ـ احصاءات الوفيات

مقدمة :

تعتبر إحصاءات الوفيات عنصراً هاماً في الإحصاءات الحيوية ، فهي علاوة على أنها تعتبر من العوامل المؤثرة في تقدير عدد السكان بين سنوات التعداد ، تكون مع احصاءات المواليد الركائز الأساسية في حركة السكان.

وكما تحتم القوانين ضرورة تسجيل المواليد فإنها تحتم كذلك ضرورة تسجيل الوفيات رسمياً خلال مدة معينة من وقت الوفاة. وهذه المدة تتفاوت من دولة لأخرى. وتقوم الجهات المعنية في الدولة بإعداد الإحصاءات الخاصة بالوفيات حسب التقسيمات المختلفة.

والبيانات الأساسية التي يتم تسجيلها في حالة الوفاة هي:

ـ تاريخ الوفاة	ـ اسم المتوفى	ـ الجنس (ذكر أو أنثى)
ـ عمر المتوفى	ـ المهنة	ـ سبب الوفاة
ـ مكان الوفاة	ـ محل الإقامة المعتاد	

وإحصاءات الوفيات تستخدم في حساب بعض المعدلات الهامة التي تستخدم كمقاييس إحصائية في مجال الدراسات السكانية ، نذكر منها على سبيل المثال المعدلات الآتية :

(أ) معدل الوفيات الخام:

$$\text{ويساوى :} \quad \frac{\text{عدد الوفيات فى البلد أثناء السنة}}{\text{عدد السكان فى منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

و يتم الحصول على بيان عدد الوفيات من واقع إحصاءات الوفيات. أما عدد السكان فيتم الحصول عليه إما من تعدادات السكان أو بإحدى طرق تقدير السكان بين سنوات التعداد .

و يعتبر هذا المعدل من أهم المقاييس التي تنشر عن الوفيات و يستخدم لمعرفة التغير الذي يطرأ على الحالة الصحية لبلد ما خلال فترات زمنية متقاربة . ولكن يؤخذ على هذا المعدل أنه لايعطي نمطاً صحيحاً ودقيقاً للوفاة بالنسبة لفئات السن المختلفة و بالنسبة للجنس في المجتمع الواحد كذلك لايعطى مؤشراً دقيقاً للمقارنة بين الحالة الصحية للمجتمعات المختلفة في التركيب العمري والنوعي للسكان .

(ب) المعدل النوعي للوفيات:

وهذا المعدل يعني الحصول على معدل وفيات لكل فئة من فئات السن لكل من الذكور والإناث كل على حدة. فإذا توافرت البيانات اللازمة لتكوين هذا المعدل وهي الوفيات مبوبة حسب فئات السن لكل من الذكور والإناث (بسط المعدل) وعدد السكان في فئات السن المختلفة لكل من الذكور والإناث (مقام المعدل)، أمكن الحصول على معدل وفيات لكل فئة من فئات السن للذكور والإناث كل على حدة.

والمعدل النوعي للوفيات بالنسبة للسن =

$$\frac{\text{عدد الوفيات في البلد خلال السنة لكل فئة من فئات السن}}{\text{عدد السكان في البلد في منتصف السنة في كل فئة من فئات السن}} \times ١٠٠٠$$

فمثلا: معدل وفيات الذكور في فئة السن (٢٠ ــ ٢٥ سنة) =

$$\frac{\text{عدد الوفيات الذكور في البلد خلال السنة في فئة السن (٢٠ ــ ٢٥ سنة)}}{\text{عدد السكان في البلد في منتصف السنة في فئة السن (٢٠ ــ ٢٥ سنة)}} \times ١٠٠٠$$

وهذا المعدل يحسب لجميع فئات السن عدا فئة السن أقل من سنة فيحسب لها معدل خاص سنعرض له فيما بعد.

ووجود معدلات نوعية للوفيات بهذا الشكل تمكن من معرفة نمط الوفيات ودراسة أي فئة عمرية معرضة للوفاة أكثر من غيرها وهكذا، وبربط هذه المعدلات ببعض المتغيرات الأخرى كأسباب الوفاة والمهنة وغيرها من المتغيرات الاقتصادية والاجتماعية الأخرى يمكن الوقوف على الحالة الصحية ومعرفة الأسباب الحقيقية ووضع خطة مناسبة لتحسين الحالة الصحية للشعب تتضمن المشروعات الصحية والوقائية وغيرها. وعلاوة على ذلك فالمعدل النوعي للوفيات يمكن من المقارنة السليمة والدقيقة بين الحالة الصحية للدول المختلفة.

(جـ) معدل وفيات الاطفال الرضع:

قبل شرح هذا المعدل وأهميته لابد من إعطاء تعريف واضح لوفيات الأطفال الرضع، ويقصد بهم «وفيات الأطفال الذين لم يبلغوا السنة الأولى من العمر» وتمثل هذه الوفيات نسبة كبيرة من الوفيات في البلاد النامية.

ومعدل وفيات الأطفال الرضع =

$$\frac{\text{عدد وفيات الأطفال الرضع فى البلد خلال السنة}}{\text{عدد المواليد أحياء فى البلد خلال نفس السنة}} \times ١٠٠٠$$

وهذا المعدل له أهمية كبيرة إذ يعتبر مقياساً حساساً للحالة الصحية ومؤشراً دقيقاً لحالة البيئة من حيث توفر الظروف الصحية المناسبة .. إلخ، لأن الأطفال الرضع يتأثرون بشدة بأي مرض نظراً لضعف احتمالهم لمقاومة الأمراض. لذلك فدراسة وتتبع هذا المعدل لسلسلة من السنوات له أهمية كبيرة في الوقوف على المستوى الصحي للسكان في الدولة وكذلك في المناطق المختلفة داخل الدولة الواحدة كالمناطق الصناعية وغيرها وكذلك لمعرفة أسباب الوفاة بين الأطفال في هذه السن ومحاولة التغلب عليها .

مثال (٢) : البيانات الآتية خاصة بإحدى البلاد عام ١٩٦٠ «بالمليون»

عدد المواليد أحياء	عدد وفيات الأطفال الرضع (أقل من سنة)	عدد الوفيات	تقدير عدد السكان (فى منتصف السنة)
١,٤	٠,١	٠,٥	٣٠

والمطلوب حساب :

١ ــ معدل الوفيات الخام .

٢ ــ معدل وفيات الأطفال الرضع .

الحل

١ ــ معدل الوفيات الخام = $\frac{\text{عدد الوفيات فى البلد أثناء السنة}}{\text{عدد السكان فى منتصف السنه}} \times ١٠٠٠$

$= \frac{٠,٥}{٣٠} \times ١٠٠٠ = ١٦,٧$ ٪.

٢ ــ عدد وفيات الأطفال الرضع =

$$\frac{\text{عدد وفيات الأطفال الرضع فى البلد أثناء السنة}}{\text{عدد المواليد أحياء فى البلد أثناء السنة}} \times ١٠٠٠$$

$= \frac{٠,١}{١,٤} \times ١٠٠٠ = ٧١,٤٣$ ٪..

رابعا ــ تقدير السكان بين سنوات التعداد

١ ــ اهمية التقديرات السكانية:

للتقديرات السكانيةواسقاطاتهافي المستقبل أهمية خاصة في تخطيط السياسة العامة للدولة في مختلف الميادين، فلابد من معرفة أعداد السكان عند تصميم البرامج والمشروعات المختلفة في مجال الصناعة وتخطيط القوى العاملة في المستقبل ومعرفة الكميات التي يحتاجها السكان من السلع والخدمات المختلفة.

وتختلف الاحتياجات البشرية في المجتمعات السكانية باختلاف فئات أعمار الأفراد وتتفاوت تبعاً لذلك أعباء الدول وسياستها الداخلية لمواجهة تلك الاحتياجات بتوجيه جهود خاصة نحو توفير سلع استهلاكية أو خدمات من أنواع معينة.

فمرحلة الطفولة المبكرة، تحتاج إلى خدمات صحية وقائية وعلاجية وهو أمر تشترك فيه كل المجتمعات على السواء وإن كانت حاجة المجتمعات النامية إلى هذه الخدمات أشد بسبب ارتفاع معدلات المواليد فيها. لذلك فإن تقدير أعداد المواليد في كل عام لمدة طويلة أمر ضروري لتخطيط مثل هذه الخدمات الصحية.

و يعقب هذه المرحلة مرحلة التعليم، حيث يحتاج التخطيط التربوى ضمن إطار التخطيط العام إلى بيانات مفصلة عن أعداد الأطفال المطلوب توفير الخدمات التعليمية لهم، حيث يتم تحديد أعداد المدارس والفصول والمدرسين اللازمين على أساس هذه الأعداد.

والمرحلة التالية لذلك هي مرحلة الدخول في قوة العمل، فتحديد أعداد الأفراد الذين يدخلون سوق العمل سنويا أمر ضروري لتهيئة فرص العمل المثمر لهم من حدود النظام العام للدولة وفي حدود إحتياجات القطاعات المختلفة وعلى أساس تحقيق التوازن بين العرض والطلب في هذا السوق.

٢ ــ مصادر البيانات اللازمة لتقدير السكان:

تعتبر نتائج تعدادات السكان المصدر الرئيسي للتوزيعات السكانية حسب الخصائص المختلفة، وأبسط المقاييس التي تستخرج من تعدادات السكان هي معدلات النمو السنوى للسكان. وهذه المعدلات تسمح بالحصول على تقديرات دقيقة إلى حد كبير لإعداد السكان في المستقبل القريب وخصوصاً إذا كان الغرض هو التقدير الإجمالي للسكان.

وجداول الحياة التي تنشأ في سنوات التعداد تعتبر الأداة الأساسية للتحليل الديموجرافي وتستخدم لتقدير أعداد السكان في المستقبل بدرجة كبيرة من الدقة.

مما سبق يتضح أن جميع المصادر اللازمة للتقديرات السكانية تعتمد أساساً على تعدادات السكان. وحيث أن عملية تعداد السكان تتطلب الكثير من التكاليف الباهظة والمجهودات المضنية التي لا يعقل معها القيام بهذه العملية سنوياً. وللتغلب على ذلك تستخدم نماذج رياضية لتقدير عدد السكان بين سنوات التعداد، مع ملاحظة أن هذه التقديرات تمثل عدد السكان في منتصف السنة التي يجري فيها التقدير. فإذا توافر لدينا عدد السكان في تعدادين متتاليين فإنه يمكن تقدير عدد السكان في أي تاريخ بين هذين التعدادين أو خارجهما بإحدى طرق التقدير الآتية:

٣ـ طرق تقدير السكان بين سنوات التعداد:

هناك عدة طرق لتقدير السكان بين سنوات التعداد نذكر منها ما يلي:

(أ) طريقة ثبات مقدار الزيادة:

وهذه الطريقة تفترض ثبات مقدار الزيادة السنوية في عدد السكان من سنة لأخرى، أي أن عدد السكان يتزايد بمقدار ثابت سنوياً. وتسمى هذه الطريقة بطريقة المتوالية العددية.

فإذا كان عدد السكان في فترة الأساس (التعداد الأول) = $س_٠$.

، مقدار الزيادة السنوية في السكان = و

فإن عدد السكان بعد سنة من فترة الأساس = $س_٠$ + و

عدد السكان بعد سنتين من فترة الأساس = $س_٠$ + ٢و

، عدد السكان بعد ن سنة من فترة الأساس = $س_٠$ + ن×و

أي أن

$$س_ن = س_٠ + ن × و$$

ويتم حساب و (مقدار الزيادة السنوية في السكان) بقسمة الفرق في عدد السكان بين التعدادين على الفترة الزمنية بين تاريخي التعدادين.

وفيما يلي مثال يوضح هذه الطريقة:

مثال (٣): إذا كان تعداد السكان في إحدى البلاد في مارس سنة ١٩٤٧ هو ١٩ مليون نسمة، وفي سبتمبر ١٩٦٠ هو ٢٦ مليون نسمة. فأوجد عدد السكان التقديري في مايو سنة ١٩٦٦

الحل

$س_٠$ = ١٩ مليون نسمة.

مقدار الزيادة بين التعدادين = ٢٦ ـ ١٩ = ٧ مليون نسمة .

الفترة الزمنية بين تاريخي التعدادين = سبتمبر ١٩٦٠ ـ مارس ١٩٤٧ = ١٣,٥ سنة .

$$\therefore \text{و (مقدار الزيادة السنوية فى السكان)} = \frac{٧}{١٣,٥} = ٥١٩ \text{ ألف نسمة}$$

شهر سنه

ن = مايو ١٩٦٦ ـ مارس ١٩٤٧ = ٢ ١٩

∴ عدد السكان التقديرى فى مايو ١٩٤٦ م ($س_ن$) = $س_٠$ + ن × و

$$= ١٩ + ١٩\tfrac{٢}{١٢} \times ٥١٩,$$

$$= ١٩ + \frac{١١٥}{٦} \times ٠,٥١٩$$

$$= ١٩ + ٩,٩٤٨$$

= ٢٨,٩٤٨ مليون نسمة

(ب) طريقة ثبات معدل الزيادة :

وتفترض هذه الطريقة ثبات معدل الزيادة في السكان من سنة لأخرى ،وتعرف هذه الطريقة طريقة المتوالية الهندسية .

فإذا كان عدد السكان في فترة الأساس (التعداد الأول) = س .

، معدل الزيادة السنوية للسكان = $ر$

فإن عدد السكان بعد سنة من فترة الأساس = $س_٠ (١ + ر)$

، عدد السكان بعد سنتين من فترة الأساس = $س_٠ (١ + ر)^٢$

، عدد السكان بعدن سنة من فترة الأساس = $س_٠ (١ + ر)^ن$

أي أن

$$\boxed{س_ن = س_٠ (١ + ر)^ن}$$

وهذه الطريقة أدق من الطريقة الأولى، وفيها يتم حساب معدل الزيادة السنوية للسكان (ر)، ثم نعوض في المعادلة فنحصل على تقدير لعدد السكان في أي وقت نريد.

وبحل المثال السابق بهذه الطريقة تتبع الخطوات الآتية:

ــ نوجد معدل الزيادة السنوية للسكان (ر):

س ن = س . (١ + ر) ن

٢٦ = ١٩ (١ + ر) ١٣,٥

∴ لو ٢٦ = لو ١٩ + ١٣,٥ لو (١ + ر)

ومنها لو (١ + ر) = (لو ٢٦ ــ لو ١٩) / ١٣,٥

= ١ / ١٣,٥ (١,٤١٥٠ ــ ١,٢٧٨٨)

= ٠,١٣٦٢ / ١٣,٥

= ٠,٠١٠١

وبالكشف في جداول الأعداد المقابلة للوغاريتمات نجد أن:

(١ + ر) = ١,٠٢٣

∴ ر = ٠,٢٣ وهي معدل الزيادة السنوية للسكان

ــ نوجد تقديرا لعدد السكان في مايو ١٩٦٦ كما يلي:

س ن = س . (١ + ر) ن

= ٢٦ (١ + ٠,٠٢٣) ٥ ٧/١٢

∴ لو س ن = لو ٢٦ + ٥ ٧/١٢ لو ١,٠٢٣

= ١,١٤٥٠ + ٥ ٧/١٢ × ,٠٠٩٨

= ١,٤١٥٠ + ٠,٠٥٤٧

= ١,٤٦٩٧

و بالكشف في جداول الأعداد المقابلة للوغاريتمات نجد أن :

$$س_ن = ٢٩,٤٩$$

أي أن عدد السكان المقدر في مايو ١٩٦٦م = ٢٩,٤٩ مليون نسمة . ويمكن الوصول إلى نفس النتيجة باستخدام عدد السكان في عام ١٩٤٧ وفي هذه الحالة تكون ن = ١٣,٥ سنة .

(جـ) طريقة المنحنى الأسي :

وتفترض أن عدد السكان في أي سنة يتبع المنحنى الأسي الذي يأخذ الصورة الآتية :

$$س_ن = س_. \times هـ^{ر . ت}$$

حيث : هـ هي أساس اللوغاريتم الطبيعي (وتساوى ٢,٧١٨٣)

ت هي الفترة الزمنية بين سنة الأساس والسنة المراد تقدير عدد السكان فيها .

ر هي معدل الزيادة السنوية للسكان .

$$\text{وتساوى } \frac{لو_{١٠} س_ن - لو_{١٠} س_.}{ت \; لو_{١٠} هـ} \quad \text{حيث } لو_{١٠} هـ = ٠,٤٣٤٣$$

و بعد حساب قيمة (ر) يمكن تقدير عدد السكان في أي سنة نريد بالتعويض في المعادلة الأولى مباشرة . و يلاحظ أن تقدير عدد السكان بهذه الطريقة يعتبر أدق من أي طريقة سابقة ، ولكن هذه الطريقة تحتاج إلى الكثير من العمليات الحسابية .

٤ ــ خاتمة :

كل ما ذكرناه سابقاً يخص تقدير العدد الأجمالي للسكان بين سنوات التعداد . أما بالنسبة لتقدير السكان في هذه السنوات حسب الخصائص المختلفة لهم كالجنس والسن والحالة التعليمية والمهنة .. إلخ ، فإنه يوجد عدة طرق لتقديرها وكلها معتمدة على البيانات التي توفرها تعدادات السكان ، فتعدادات السكان توفر نتائج تفصيلية تشمل توزيعات مختلفة للسكان حسب السن والجنس والحالة الزواجية والتعليمية والمهنة والنشاط الاقتصادي وغير ذلك ، ويمكن تتبع معظم هذه الخصائص فيما بين سنوات التعداد من الإحصاءات الجارية التي تقوم بها الدولة سواء بالحصر الشامل أو العينة و بذلك يمكن الحصول على تقديرات السكان حسب الخصائص المختلفة السابق بيانها .

مثال عام

البيانات الآتية خاصة بإحدى الدول :

عدد السكان في سنة ١٩٥٢ (بالمليون نسمة) = ٢٠

عدد السكان في سنة ١٩٦٢ (بالمليون نسمة) = ٢٥

والمطلوب تقدير عدد السكان في هذه الدولة في عام ١٩٧٠ باستخدام :

(أ) طريقة ثبات مقدار الزيادة .

(ب) طريقة ثبات معدل الزيادة .

(جـ) طريقة المنحنى الأسي .

الحل

(أ) الطريقة الأولى : طريقة ثبات مقدار الزيادة .

الصيغة التي تستخدم هي: $س_ن = س_. + ن \times و$

و(مقدار الزيادة السنوية في السكان) $= \frac{٢٥ - ٢٠}{١٠} = ٠,٥$ مليون نسمه

$ن = ١٩٧٠ - ١٩٦٢ = = ٨$ سنوات

وبالتعويض في الصيغة السابقة نجد أن :

$س_ن = ٢٥ + ٨ \times ٠,٥$

$= ٢٥ + ٤ = ٢٩$ مليون نسمة

أي أن عدد السكان المقدر سنة ١٩٧٠ هو ٢٩ مليون نسمة .

(ب) الطريقة الثانية : طريقة ثبات معدل الزيادة .

والصيغة المستخدمة هي $س_ن = س_. (١ + ر) ^ن$

١ ـ حساب معدل الزيادة السنوية في السكان (ر) :

$٢٥ = ٢٠ (١ + ر)^{١٠}$

$$\text{لو } ٢٥ = \text{لو } ٢٠ + ١٠ \text{ لو } (١ + ر)$$

$$\therefore \text{لو } (١ + ر) = \frac{\text{لو } ٢٥ - \text{لو } ٢٠}{١٠}$$

$$= \frac{١,٣٩٧٩٤ - ١,٣٠١٠٣}{١٠}$$

$$= \frac{٠,٠٩٦٩١}{١٠}$$

$$= .٠٠٩٦٩١$$

و بالكشف في جداول الأعداد المقابلة للوغارتيمات نجد أن:

$$(١ + ر) = ١٠٢٢٣$$

$$\therefore \quad ر = ٠,٠٢٢٣$$

٢ ــ تقدير عدد السكان عام ١٩٧٠:

و يتم الحصول عليه بالتعويض بقيمة (ر) في الصيغة الأولى فنجد أن:

$$س_ن = ٢٥ (١ + ٠,٠٢٢٣)^{٨}$$

$$\therefore \text{لو } س_ن = \text{لو } ٢٥ + ٨ \text{ لو } ١.٠٢٢٣$$

$$= ١,٣٩٧٩٤ + ٨ \times ٠,٠٠٩٤٥$$

$$= ١,٣٩٧٩٤ + ٠,٠٧٥٦٠$$

$$= ١,٤٧٣٥٤$$

و بالكشف في جداول الأعداد المقابلة للوغاريتمات نجد أن:

$$س_ن = ٢٩,٧٥٤ \text{ مليون}$$

أي أن عدد السكان المقدر سنة ١٩٧٠ = ٢٩,٧٥٤ مليون نسمة

(جـ) الطريقة الثالثة: طريقة المنحنى الأسى

والصيغة التي تستخدم في حسابها هي

$$س_ن = س_. \times هـ^{ر . ت}$$

ويتم حساب (ر) معدل الزيادة السنوية للسكان كما يلي:

$$ر = \frac{لو س_ن - لو س_.}{ت لو هـ}$$

$$= \frac{لو ٢٥ - لو ٢٠}{١٠ \times ٠,٤٣٤٣}$$

$$= \frac{١,٣٩٧٩٤ - ١,٣٠١٠٣}{٤,٣٤٣٠}$$

$$= \frac{٠,٠٩٦٩١}{٤.٣٤٣٠} = ٠,٠٢٢٣$$

وبالتعويض في الصيغة الأولى نجد أن:

$$س_ن = ٢٥ \times هـ^{٨\times ,٠٢٢٣}$$

$$لو س_ن = لو ٢٥ + ,١٧٨٤ لو هـ$$

$$= ١,٣٩٧٩٤ + ,١٧٨٤ \times ٠,٤٣٤٣$$

$$= ١,٣٩٧٩٤ + ٠,٠٧٧٤٨$$

$$= ١,٤٧٥٤٢$$

وبالكشف في جداول لأعداد المقابلة للوغاريتمات نجد أن:

$$س_ن = ٢٩,٨٨$$

أي أن عدد السكان التقديري في سنة ١٩٧٠ م = ٢٩,٨٨ مليون نسمة.

تمارين

١ ـ ماذا يقصد بتعداد السكان. وما هي أغراضه؟
٢ ـ ما هي كثافة السكان، وكيف يتم حسابها؟
٣ ـ أذكر ما تعرفه عن أسس إجراء تعداد السكان.
٤ ـ ما أهمية التركيب العمري والنوعي للسكان؟
٥ ـ ماذا يقصد بالحالة الاقتصادية للسكان، وما هي أوجه الاستفادة منها؟
٦ ـ تكلم باختصار عن معدلات المواليد، مع ذكر مزايا وعيوب كل منها.

٧ــ تكلم باختصار عن معدلات الوفيات، مع ذكر مزايا وعيوب كل منها .

٨ــ ما أهمية تقدير السكان بين سنوات التعداد؟ اذكر طرق تقدير السكان موضحاً مزايا وعيوب كل طريقة .

٩ــ بلغ تعداد السكان في إحدى الدول ٦٠ مليون نسمة منتصف عام ١٩٧٠ بينما كان تعداد هذه الدولة ٥٢ مليون نسمة في منتصف عام ١٩٦٥ .

والمطلوب تقدير عدد السكان في هذه الدولة في عام ١٩٧٤ باستخدام :

(أ) طريقة ثبات مقدار الزيادة .

(ب) طريقة ثبات معدل الزيادة .

(جـ)طريقة المنحنى الأسى .

١٠ــ البيانات الآتية خاصة باحدى البلاد عام ١٩٨٠ (بالمليون) .

عدد المواليد أحياء خلال السنة= ٨ر١

تقدير عدد السكان في منتصف السنة= ٠ر٢٦

عدد الوفيات أثناء السنة= ٥ر٠

عدد وفيات الأطفال الرضع خلال السنة= ١ر٠

عدد النساء في سن الحمل خلال السنة= ٤ر٧

عدد النساء المتزوجات في سن الحمل خلال السنة= ٨ر٥

والمطلوب حساب :

١ــ معدل المواليد الخام

٢ــ معدل الخصوبة العام

٣ــ معدل التوالد

٤ــ معدل الوفيات الخام

٥ــ معدل وفيات الأطفال الرضع



المراجع

* مقدمة في طرق التحليل الاحصائي — د. احمد عباده سرحان
* البحث الاحصائي — د. حسن محمد حسين
* مبادىء الاحصاء — د. عبدالمنعم ناصر الشافعي
* مبادىء الطرق الاحصائية — د. محمد عبدالرحمن البدري
* مبادىء الاحصاء الرياضي — د. مدني دسوقي مصطفى